Die Größenlehre,

für

Realschulen

populär bearbeitet

von

Gust.av Friderich Wucherer,

Evangelisch = Lutherischen Stadt = und Universitätspfarrer zu Freyburg im Breisgau.

Des zweyten Theils,

welcher die Raumlehre enthält,

zweyter Cursus.

Mit fünf Kupfertafeln.

Carlsruhe,

in Macklots Hofbuchhandlung.

1813.

Die Größenlehre, für Realschulen populär bearbeitet

von

Gustav Friderich Wucherer,
Evangelisch-Lutherischen Stadt- und Universitätspfarrer zu Freyburg im Breisgau.

Des zweyten Theils, welcher die Raumlehre enthält, zweyter Cursus.

Mit fünf Kupfertafeln.

Carlsruhe,
in Macklots Hofbuchhandlung.
1813.

Die Größenlehre,

für

Realschulen

populär bearbeitet

von

Gustav Friderich Wucherer,

Evangelisch-Lutherischen Stadt- und Universitätspfarrer zu Freyburg im Breisgau.

Des zweyten Theils, welcher die Raumlehre enthält, zweyter Cursus.

Mit fünf Kupfertafeln.

Carlsruhe,
in Macklots Hofbuchhandlung.
1813.

Vorrede.

Einige, mir mündlich gemachte Bemerkungen über den ersten Curs des zweyten Theils veranlassen mich, hier zu wiederholen, was ich beym ersten Curs des ersten Theils gesagt habe, daß ich nemlich bey diesem zweyten Theil nicht den ganzen ersten Theil, sondern nur die zwey ersten Curse desselben voraussetze. Ich habe mich daher durchaus bey allen Erklärungen und Beweisen dieser Voraussetzung gemäß ausgedruckt, und deßwegen auch manchen Sätzen und Aufgaben, die eigentlich nicht zu meinem Plane gehörten, in den Anmerkungen eine Stelle angewiesen, auf den Fall, wenn ein oder der andere Lehrer es für besser halten sollte, die gesammte Arithmetik der Geo-

metrie vorangehen zu lassen. Nur beym letzten Abschnitt des gegenwärtigen Curses fiel jene Voraussetzung weg. Die Trigonometrie erfordert Kenntniß der Logarithmenlehre, und es wird daher dieser Abschnitt am füglichsten als ein Anhang zum dritten Curs der Zahlenlehre betrachtet, und unmittelbar nach diesem vorgetragen werden.

Der Verfasser.

Inhaltsanzeige.

Erster Abschnitt.

Berechnung, Vergleichung, Verwandlung, und Theilung der Drey- Vier- und irregulären Vielecke.

§. 69 — 79. Vom Flächen- oder Quadratmaaß.

§. 69. Begriff vom Flächen- oder Quadratmaaß. Verschiedene Arten desselben.

§. 70. Signaturen und ihr Gebrauch.

§. 71. Erste Vorbereitungsaufgabe: Zu finden, wie viel eine Zahl einer höhern Sorte in einer beliebig niedrigern betrage.

§. 72. Zweyte Vorbereitungsaufgabe: Zu finden, wie viel eine Zahl einer niedrigern Sorte in höhern Sorten ausmache.

§. 73. Dritte Vorbereitungsaufgabe: Mehrere Sorten auf Eine, und zwar auf die niedrigste der gegebenen zu bringen.

§. 74. Addition und Subtraction.

§. 75. Multiplication.

§. 76. Division.

§. 77. Zehntheiliges Quadratmaaß in gemeines und gemeines in zehntheiliges zu verwandeln.

§. 78. Verwandlung des Quadratmaaßes des einen Orts in das eines andern.

§. 79. Etwas weniges vom ehemals üblichen Riemenmaaß.

§. 80. — §. 83. Berechnung der Drey- Vier und irregulären Vielecke.

§. 80. Berechnung der Parallelogramme.

§. 81. Berechnung der Dreyecke.

§. 82. Berechnung der Trapeze.

§. 83. Berechnung jedes irregulären geradlinichten Vielecks, und der irregulären krummlinichten Flächenfiguren.

§. 84 — §. 86. Vergleichung der Drey = Vier= und irregulären Vielecke.

§. 84. Vergleichung der Parallelogramme überhaupt.

§. 85. Vergleichung der Dreyecke überhaupt, und der ähnlichen insbesondere.

§. 86. Vergleichung der ähnlichen irregulären Vielecke, und Anwendung hiervon auf alle geradlinichten Flächenfiguren, welche ähnlich sind.

§. 87 — §. 89. Verwandlung der Drey = Vier= und irregulären Vielecke.

§. 87. Geometrische Addition und Multiplication, Subtraktion und Division der Quadrate.

§. 88. Verwandlung eines Rektangels, eines Rhombus und Rhomboiden in ein Quadrat.

§. 89. Verwandlung der Dreyecke, Trapeze und irregulären Vielecke in Rektangel und Quadrate.

§. 90 — §. 92. Theilung der Drey. Vier = und irregulären Vielecke.

§. 90. Theilung der Parallelogramme.

§. 91. Theilung der Dreyecke.

§. 73. Dritte Vorbereitungsaufgabe: Mehrere Sorten auf Eine, und zwar auf die niedrigste der gegebenen zu bringen.

§. 74. Addition und Subtraction.

§. 75. Multiplication.

§. 76. Division.

§. 77. Zehntheiliges Quadratmaaß in gemeines und gemeines in zehntheiliges zu verwandeln.

§. 78. Verwandlung des Quadratmaaßes des einen Orts in das eines andern.

§. 79. Etwas weniges vom ehemals üblichen Riemenmaaß.

§. 80. — §. 83. Berechnung der Drey= Vier und irregulären Vielecke.

§. 80. Berechnung der Parallelogramme.

§. 81. Berechnung der Dreyecke.

§. 82. Berechnung der Trapeze.

§. 83. Berechnung jedes irregulären geradlinichten Vielecks, und der irregulären krummlinichten Flächenfiguren.

§. 84 — §. 86. Vergleichung der Drey- Vier- und irregulären Vielecke.

§. 84. Vergleichung der Parallelogramme überhaupt.

§. 85. Vergleichung der Dreyecke überhaupt, und der ähnlichen insbesondere.

§. 86. Vergleichung der ähnlichen irregulären Vielecke, und Anwendung hiervon auf alle geradlinichten Flächenfiguren, welche ähnlich sind.

§. 87 — §. 89. Verwandlung der Drey- Vier- und irregulären Vielecke.

§. 87. Geometrische Addition und Multiplication, Subtraktion und Division der Quadrate.

§. 88. Verwandlung eines Rektangels, eines Rhombus und Rhomboiden in ein Quadrat.

§. 89. Verwandlung der Dreyecke, Trapeze und irregulären Vielecke in Rektangel und Quadrate.

§. 90 — §. 92. Theilung der Drey. Vier- und irregulären Vielecke.

§. 90. Theilung der Parallelogramme.

§. 91. Theilung der Dreyecke.

§. 73. Dritte Vorbereitungsaufgabe: Mehrere Sorten auf Eine, und zwar auf die niedrigste der gegebenen zu bringen.

§. 74. Addition und Subtraction.

§. 75. Multiplication.

§. 76. Division.

§. 77. Zehntheiliges Quadratmaaß in gemeines und gemeines in zehntheiliges zu verwandeln.

§. 78. Verwandlung des Quadratmaaßes des einen Orts in das eines andern.

§. 79. Etwas weniges vom ehemals üblichen Riemenmaaß.

§. 80. — §. 83. Berechnung der Drey- Vier und irregulären Vielecke.

§. 80. Berechnung der Parallelogramme.

§. 81. Berechnung der Dreyecke.

§. 82. Berechnung der Trapeze.

§. 83. Berechnung jedes irregulären geradlinichten Vielecks, und der irregulären krummlinichten Flächenfiguren.

§. 84 — §. 86. Vergleichung der Drey- Vier- und irregulären Vielecke.

§. 84. Vergleichung der Parallelogramme überhaupt.

§. 85. Vergleichung der Dreyecke überhaupt, und der ähnlichen insbesondere.

§. 86. Vergleichung der ähnlichen irregulären Vielecke, und Anwendung hiervon auf alle geradlinichten Flächenfiguren, welche ähnlich sind.

§. 87 — §. 89. Verwandlung der Drey- Vier- und irregulären Vielecke.

§. 87. Geometrische Addition und Multiplication, Subtraktion und Division der Quadrate.

§. 88. Verwandlung eines Rektangels, eines Rhombus und Rhomboiden in ein Quadrat.

§. 89. Verwandlung der Dreyecke, Trapeze und irregulären Vielecke in Rektangel und Quadrate.

§. 90 — §. 92. Theilung der Drey. Vier- und irregulären Vielecke.

§. 90. Theilung der Parallelogramme.

§. 91. Theilung der Dreyecke.

§. 73. Dritte Vorbereitungsaufgabe: Mehrere Sorten auf Eine, und zwar auf die niedrigste der gegebenen zu bringen.

§. 74. Addition und Subtraction.

§. 75. Multiplication.

§. 76. Division.

§. 77. Zehntheiliges Quadratmaaß in gemeines und gemeines in zehntheiliges zu verwandeln.

§. 78. Verwandlung des Quadratmaaßes des einen Orts in das eines andern.

§. 79. Etwas weniges vom ehemals üblichen Riemenmaaß.

§. 80. — §. 83. Berechnung der Drey = Vier und irregulären Vielecke.

§. 80. Berechnung der Parallelogramme.

§. 81. Berechnung der Dreyecke.

§. 82. Berechnung der Trapeze.

§. 83. Berechnung jedes irregulären geradlinichten Vielecks, und der irregulären krummlinichten Flächenfiguren.

§. 84 — §. 86. Vergleichung der Drey- Vier- und irregulären Vielecke.

§. 84. Vergleichung der Parallelogramme überhaupt.

§. 85. Vergleichung der Dreyecke überhaupt, und der ähnlichen insbesondere.

§. 86. Vergleichung der ähnlichen irregulären Vielecke, und Anwendung hiervon auf alle geradlinichten Flächenfiguren, welche ähnlich sind.

§. 87 — §. 89. Verwandlung der Drey- Vier- und irregulären Vielecke.

§. 87. Geometrische Addition und Multiplication, Subtraktion und Division der Quadrate.

§. 88. Verwandlung eines Rektangels, eines Rhombus und Rhomboiden in ein Quadrat.

§. 89. Verwandlung der Dreyecke, Trapeze und irregulären Vielecke in Rektangel und Quadrate.

§. 90 — §. 92. Theilung der Drey. Vier- und irregulären Vielecke.

§. 90. Theilung der Parallelogramme.

§. 91. Theilung der Dreyecke.

§. 73. Dritte Vorbereitungsaufgabe: Mehrere Sorten auf Eine, und zwar auf die niedrigste der gegebenen zu bringen.

§. 74. Addition und Subtraction.

§. 75. Multiplication.

§. 76. Division.

§. 77. Zehntheiliges Quadratmaaß in gemeines und gemeines in zehntheiliges zu verwandeln.

§. 78. Verwandlung des Quadratmaaßes des einen Orts in das eines andern.

§. 79. Etwas weniges vom ehemals üblichen Riemenmaaß.

§. 80. — §. 83. Berechnung der Drey = Vier und irregulären Vielecke.

§. 80. Berechnung der Parallelogramme.

§. 81. Berechnung der Dreyecke.

§. 82. Berechnung der Trapeze.

§. 83. Berechnung jedes irregulären geradlinichten Vielecks, und der irregulären krummlinichten Flächenfiguren.

§. 84 — §. 86. Vergleichung der Drey- Vier- und irregulären Vielecke.

§. 84. Vergleichung der Parallelogramme überhaupt.

§. 85. Vergleichung der Dreyecke überhaupt, und der ähnlichen insbesondere.

§. 86. Vergleichung der ähnlichen irregulären Vielecke, und Anwendung hiervon auf alle geradlinichten Flächenfiguren, welche ähnlich sind.

§. 87 — §. 89. Verwandlung der Drey- Vier- und irregulären Vielecke.

§. 87. Geometrische Addition und Multiplication, Subtraktion und Division der Quadrate.

§. 88. Verwandlung eines Rektangels, eines Rhombus und Rhomboiden in ein Quadrat.

§. 89. Verwandlung der Dreyecke, Trapeze und irregulären Vielecke in Rektangel und Quadrate.

§. 90 — §. 92. Theilung der Drey. Vier- und irregulären Vielecke.

§. 90. Theilung der Parallelogramme.

§. 91. Theilung der Dreyecke.

§. 73. Dritte Vorbereitungsaufgabe: Mehrere Sorten auf Eine, und zwar auf die niedrigste der gegebenen zu bringen.

§. 74. Addition und Subtraction.

§. 75. Multiplication.

§. 76. Division.

§. 77. Zehntheiliges Quadratmaaß in gemeines und gemeines in zehntheiliges zu verwandeln.

§. 78. Verwandlung des Quadratmaaßes des einen Orts in das eines andern.

§. 79. Etwas weniges vom ehemals üblichen Riemenmaaß.

§. 80. — §. 83. Berechnung der Drey- Vier und irregulären Vielecke.

§. 80. Berechnung der Parallelogramme.

§. 81. Berechnung der Dreyecke.

§. 82. Berechnung der Trapeze.

§. 83. Berechnung jedes irregulären geradlinichten Vielecks, und der irregulären krummlinichten Flächenfiguren.

§. 84 — §. 86. Vergleichung der Drey = Vier- und irregulären Vielecke.

§. 84. Vergleichung der Parallelogramme überhaupt.

§. 85. Vergleichung der Dreyecke überhaupt, und der ähnlichen insbesondere.

§. 86. Vergleichung der ähnlichen irregulären Vielecke, und Anwendung hiervon auf alle geradlinichten Flächenfiguren, welche ähnlich sind.

§. 87 — §. 89. Verwandlung der Drey = Vier- und irregulären Vielecke.

§. 87. Geometrische Addition und Multiplication, Subtraktion und Division der Quadrate.

§. 88. Verwandlung eines Rektangels, eines Rhombus und Rhomboiden in ein Quadrat.

§. 89. Verwandlung der Dreyecke, Trapeze und irregulären Vielecke in Rektangel und Quadrate.

§. 90 — §. 92. Theilung der Drey. Vier = und irregulären Vielecke.

§. 90. Theilung der Parallelogramme.

§. 91. Theilung der Dreyecke.

§. 73. Dritte Vorbereitungsaufgabe: Mehrere Sorten auf Eine, und zwar auf die niedrigste der gegebenen zu bringen.

§. 74. Addition und Subtraction.

§. 75. Multiplication.

§. 76. Division.

§. 77. Zehntheiliges Quadratmaaß in gemeines und gemeines in zehntheiliges zu verwandeln.

§. 78. Verwandlung des Quadratmaaßes des einen Orts in das eines andern.

§. 79. Etwas weniges vom ehemals üblichen Riemenmaaß.

§. 80. — §. 83. Berechnung der Drey- Vier und irregulären Vielecke.

§. 80. Berechnung der Parallelogramme.

§. 81. Berechnung der Dreyecke.

§. 82. Berechnung der Trapeze.

§. 83. Berechnung jedes irregulären geradlinichten Vielecks, und der irregulären krummlinichten Flächenfiguren.

§. 84 — §. 86. Vergleichung der Drey = Vier= und irregulären Vielecke.

§. 84. Vergleichung der Parallelogramme überhaupt.

§. 85. Vergleichung der Dreyecke überhaupt, und der ähnlichen insbesondere.

§. 86. Vergleichung der ähnlichen irregulären Vielecke, und Anwendung hiervon auf alle geradlinichten Flächenfiguren, welche ähnlich sind.

§. 87 — §. 89. Verwandlung der Drey = Vier= und irregulären Vielecke.

§. 87. Geometrische Addition und Multiplication, Subtraktion und Division der Quadrate.

§. 88. Verwandlung eines Rektangels, eines Rhombus und Rhomboiden in ein Quadrat.

§. 89. Verwandlung der Dreyecke, Trapeze und irregulären Vielecke in Rektangel und Quadrate.

§. 90 — §. 92. Theilung der Drey . Vier = und irregulären Vielecke.

§. 90. Theilung der Parallelogramme.

§. 91. Theilung der Dreyecke.

§. 73. Dritte Vorbereitungsaufgabe: Mehrere Sorten auf Eine, und zwar auf die niedrigste der gegebenen zu bringen.

§. 74. Addition und Subtraction.

§. 75. Multiplication.

§. 76. Division.

§. 77. Zehntheiliges Quadratmaaß in gemeines und gemeines in zehntheiliges zu verwandeln.

§. 78. Verwandlung des Quadratmaaßes des einen Orts in das eines andern.

§. 79. Etwas weniges vom ehemals üblichen Riemenmaaß.

§. 80. — §. 83. Berechnung der Drey- Vier und irregulären Vielecke.

§. 80. Berechnung der Parallelogramme.

§. 81. Berechnung der Dreyecke.

§. 82. Berechnung der Trapeze.

§. 83. Berechnung jedes irregulären geradlinichten Vielecks, und der irregulären krummlinichten Flächenfiguren.

§. 84 — §. 86. Vergleichung der Drey- Vier- und irregulären Vielecke.

§. 84. Vergleichung der Parallelogramme überhaupt.

§. 85. Vergleichung der Dreyecke überhaupt, und der ähnlichen insbesondere.

§. 86. Vergleichung der ähnlichen irregulären Vielecke, und Anwendung hiervon auf alle geradlinichten Flächenfiguren, welche ähnlich sind.

§. 87 — §. 89. Verwandlung der Drey- Vier- und irregulären Vielecke.

§. 87. Geometrische Addition und Multiplication, Subtraktion und Division der Quadrate.

§. 88. Verwandlung eines Rektangels, eines Rhombus und Rhomboiden in ein Quadrat.

§. 89. Verwandlung der Dreyecke, Trapeze und irregulären Vielecke in Rektangel und Quadrate.

§. 90 — §. 92. Theilung der Drey. Vier- und irregulären Vielecke.

§. 90. Theilung der Parallelogramme.

§. 91. Theilung der Dreyecke.

§. 92. Theilung der Trapeze und der irregulären gerad-
linichten Vielecke.

Zweyter Abschnitt.

Von den Cirkeln und den regulären Viel-ecken.

§. 93. Einige Sätze von den bey Cirkeln vorkommenden Linien und Winkeln.

§. 94. Einige leichte Aufgaben, deren Auflösung sich unmittelbar aus einigen Sätzen des vorigen §. ergibt.

§. 95. Von den Centri- und Polygonwinkeln eines regulären Vielecks.

§. 96. Bildung der regulären Vielecke.

§. 97. Berechnung, Vergleichung, und Verwandlung derselben.

§. 98. Berechnung der Peripherie eines Cirkels aus seinem Diameter, und seines Diameters aus seiner Peripherie.

§. 99. Berechnung, Vergleichung und Verwandlung der Cirkelfläche.

§. 100. Vergleichung der Cirkelfläche mit dem Quadrat des Diameters, und daraus gefolgerte Berechnung ihres Inhalts, ohne die Peripherie zuvor suchen zu müssen.

§. 101. Berechnung der Stücke vom Cirkel.

§. 102. Etwas weniges von der Ellipse.

Dritter Abschnitt.

Von den Körpern.

(Stereometrie.)

§. 103. Etwas von der Lage der Linien und Flächen.

§. 104. Begriffe und Eintheilung der Körper.

§. 105. Von den Netzen der regulären und der senkrechten halbregulären Körper.

§. 106. Berechnung der Oberflächen der Körper, insbesondere der Kugel.

§. 107. Von der Gleichheit der gleichdicken und zugespitzten Körper.

§. 108. Vom Körper, oder Kubikmaaß.

§. 109. Berechnung des Inhalts der Körper.

§. 110. Etwas von der Vergleichung und Verwandlung der Körper.

Vierter Abschnitt.

Von der Berechnung der unbekannten Seiten und Winkel, wie auch der Höhe eines ebenen Dreyecks, wenn die zur Bildung desselben nöthigen Stücke gegeben sind.

(Ebene Trigonometrie.)

§. 111. Einleitung in die Trigonometrie.

§. 112. Möglichkeit, die 2 unbekannten Seiten eines Dreyecks aus der gegebenen dritten Seite und den Winkeln desselben, mittelst einer Chordentafel, zu berechnen.

§. 113. Gebrauch der halben Chorden statt der ganzen; Begriff vom Sinus eines Winkels; Satz von dem Ver-

hältniß der Seiten zu den Sinus der gegenüberste- henden Winkel.

§. 114. Sinus rechter und stumpfer Winkel; Vorzüge der Sinus vor der Chordenrechnung; Sinustafeln; Möglichkeit ihrer Berechnung; Logarithmen der Sinus; Cosinus, Tangente und Cotangente, Secante und Cosecante, Sinus Versus und Cosinus Versus eines Winkels.

§. 115. — §. 118. Wirkliche Berechnung der Seiten, Winkel und der Höhe eines Dreyecks aus hinlänglich bestimmenden Stücken desselben.

§. 115. Aus Einer gegebenen Seite und zwey gegebenen Winkeln den dritten Winkel, die zwey übrigen Seiten und die zur gegebenen Seite als Grundlinie gehörige Höhe eines Dreyecks zu finden, und zwar

A) überhaupt, wenn das Dreyeck ungleichseitig und schiefwinklicht, oder auch rechtwinklicht ist, der rechte Winkel aber der gegebenen Seite gegenüber liegt.

B) wenn das Dreyeck, gleichschenklicht ist, und zwar

a) wenn die zwey gleichen Winkel beyde an der gegebenen Seite,

b) wenn beyde an einer der unbekannten Seiten anliegen;

C) wenn das Dreyeck gleichseitig ist;

D) wenn es rechtwinklicht ist, und der rechte Winkel an der gegebenen Seite anliegt;

§. 116. Aus zwey gegebenen Seiten und Einem gegebenen Winkel, der einer jener bekannten Seiten gegenüberliegt, nebst der Art des der andern Seite gegenüberliegenden Winkels, die dritte Seite, die zwey übrigen Winkel und die zu einer der gegebenen Seiten als Grundlinie gehörige Höhe eines Dreyecks zu finden, und zwar

A) überhaupt, wenn der gegebene Winkel schief ist, und die zwey gegebenen Seiten ungleich sind;

B) wenn der gegebene Winkel abermals schief ist, die zwey gegebenen Seiten aber gleich sind;

C) wenn der gegebene Winkel ein rechter ist.

§. 117. Aus den drey gegebenen Seiten die zu einer derselben als Grundlinie gehörige Höhe und die drey Winkel eines Dreyecks zu finden, und zwar

A) überhaupt, wenn die gegebenen Seiten ungleich sind.

B) wenn zwey derselben gleich sin

C) wenn alle drey einander gleich sind.

§. 118. Aus zwey gegebenen Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel die zwey übrigen Winkel, die dritte Seite und die zu einer der gegebenen Seiten als Grundlinie gehörige Höhe eines Dreyecks zu finden, und zwar

A) überhaupt, wenn die gegebenen zwey Seiten ungleich sind, und der von ihnen eingeschlossene Winkel schief ist;

B) wenn die gegebenen Seiten abermals ungleich sind, der eingeschlossene Winkel aber ein rechter ist.

C) Wenn die gegebenen zwey Seiten gleich sind, und der eingeschlossene Winkel schief ist.

D) Wenn die gegebenen zwey Seiten gleich sind, und der eingeschlossene Winkel ein rechter ist.

Erster Abschnitt.

Berechnung, Vergleichung, Verwandlung und Theilung der Drey-, Vier- und irregulären Vielecke.

Vom Flächen- oder Quadratmaaß.

§. 69.

Wie wir uns [illegible] Ausmessung der Linien, als Maaßstab, einer Lini[illegible] haben, so gebraucht man zur Ausmessung de[illegible] [illegible]ßstab, eine Fläche, die [illegible] von [illegible] [illegible]aß, wenn sie wiederholt [illegible]nan[illegible] [illegible]eren Zwischenräume ent[illegible]en. [illegible] Flächenfiguren, die durch [illegible]gab[illegible] [illegible]mt werden können, beym

Erster Abschnitt.

Berechnung, Vergleichung, Verwandlung und Theilung der Drey-, Vier- und irregulären Vielecke.

Vom Flächen- oder Quadratmaaß.

§. 69.

Wie wir uns zur Ausmessung der Linien, als Maaßstab, einer Linie bedient haben, so gebraucht man zur Ausmessung der Flächen, als Maaßstab, eine Fläche, die jedoch von der Art seyn muß, daß, wenn sie wiederholt an einander gelegt wird, keine leeren Zwischenräume entstehen. Dieß ist unter denjenigen Flächenfiguren, die durch Angabe einer einzigen Linie bestimmt werden können, beym

gleichseitigen Dreyeck, beym regulären Sechseck, und beym Quadrat der Fall. Man hat jedoch nur das letzte, nemlich das Quadrat, weil diese Figur in mehrern Hinsichten die bequemste zu dieser Absicht ist, als geometrischen Flächenmaaßstab angenommen, woher dann auch das geometrische Flächenmaaß den Namen Quadratmaaß erhalten hat.

Man denke sich ein Quadrat, dessen Seite eine Ruthe, ein anderes, dessen Seite ein Schuh, ein noch kleineres, dessen Seite nur ein Zoll ist ꝛc. so hat man Quadratruthen, Quadratschuhe, Quadratzolle ꝛc. und zwar gemeines Quadratmaaß, wenn die Seiten jener Quadrate die gemeine, hingegen Decimalquadratmaaß, wenn sie die zehntheilige Eintheilung haben.

Theilt man diese Seiten wirklich ein, und zieht (Fig. 1.) die Theilpunkte zusammen; so ist ersichtlich, daß, wenn AB z. B. eine zehnfüßige Längenruthe vorstellt, die zehnfüßige Quadratruthe 10 × 10 oder 100 Quadratschuhe enthalte. Hat hingegen die Längenruthe 16 Schuhe, so gehen 16 × 16 oder 256; hat sie 12 Schuhe, so gehen 12 × 12 oder 144, und hat sie 6 Schuhe, so gehen 6 × 6 oder 36 Quadratfuße auf die Quadratruthe. Da ferner im gemeinen Längenmaaß, die Ruthe mag 16, 12 oder 6 Schuhe lang seyn, es, vom Schuh an, von 12 zu 12, im Decimallängenmaaß aber durchaus von 10 zu 10 geht; so ist eben so begreiflich, daß jeder gemeine Quadratschuh 144 Quadratzolle, jeder gemeine Quadratzoll 144 Quadratlinien ꝛc. Der Decimalquadratschuh aber 100 Quadratzoll ꝛc. haben müsse.

Mit diesem Quadratmaaß könnte man nun auf die Art, die in der Folge gelehrt werden wird, eine jede Fläche ausmessen, und ihren Inhalt angeben; da dieß aber bey sehr großen Flächen, wie bey Feldern, ganzen Gemarkungen, oder gar bey ganzen Ländern auch sehr große und beschwerliche Zahlen verursachen würde; so nahm man noch zwey größere Flächenmaaßstäbe an, nemlich ein Feldmaaß für einzelne Felder und auch für ganze Gemarkungen, und ein Ländermaaß für ganze Länder, Reiche und Welttheile. Dieß letztere ist die Quadratstunde oder Quadratmeile, ein Quadrat, das zur Seite eine einfache oder doppelte Wegstunde hat; das uns wichtigere Feldmaaß hingegen besteht aus mehr oder weniger Quadratruthen, und heißt in dem Badischen Unterland Morgen und im Oberland Juchert (Juch, auch hie und da Thau, wenn vom Wiesenfeld oder Matten die Rede ist.)

Der Unterländer Morgen hält 160 Unterländer Quadratruthen, folglich das Viertel 40 Ruthen.

Die Hochberger Juchert 360 Hochberger Quadratruthen, ein Zweitel auf dem platten Lande $\frac{2}{3}$ davon, oder 240 Ruthen, in den Waldgegenden aber $\frac{3}{4}$, oder 270 Ruthen; eine Mannshauet $\frac{1}{8}$, oder 45 Ruthen.

Die Badenweilerer, Rötteler und Sausenburger Juchert 288 Quadratruthen; ein Zweitel im Badenweilerschen $\frac{3}{4}$ davon, oder 216 Ruthen, und im Röttel'schen und Sausenburgischen $\frac{2}{3}$, oder 192 Ruthen.

Die Baseler Juchert 140 Quadratruthen.

Da das Neufranzösische und das Wildsche *) Längenmaaß, ersteres ganz, letzteres beynahe durchaus von 10 zu 10 geht; so ist auch das Quadratmaaß beyder decimal, d. h. es geht von 100 zu 100. Dieses wird folgende Tabelle noch deutlicher machen.

Neufranzösisches Quadratmaaß.	□ Meter.	Neues Badisches Quadratmaaß.	□ Fuße.
1 □ Myriameter	100000000	1 □ Centfuß	10000
1 □ Kilometer	1000000	1 □ Ruthe	100
1 □ Hektometer	10000	{1 □ Klafter	36}
1 □ Dekameter	100	{1 □ Elle	4}
1 □ Meter	1	1 □ Schuh	1
1 □ Decimeter	0,01	1 □ Zoll	0,01
1 □ Centimeter	0,0001	1 □ Linie	0,0001
1 □ Millimeter	0,000001	1 □ Punkt	0,000001

Die Namen der Feldmaaße und die Abstufungen derselben sind:

---

*) Den 10ten des Novembers 1810 wurden Herrn Hofrath Wilds Vorschläge angenommen, die Einführung der neuen Maaße decretirt, und die Großherzoglichen Ministerien des Innern und der Finanzen mit der Vollziehung dieses Decretes beauftragt. Großherzoglich Badisches Regierungsblatt, 1810, Nro. 46.

Neufranzösisches Feldmaaß.	
	Are.
1 Myriare, od. □ Kilomet.	10000
1 Kilare	1000
1 Hektare, oder □ Hektomet.	100
1 Dekare	10
1 Are, oder □ Dekamet.	1
1 Deciare	0,1
1 Centiare, od. □ Meter	0,01
1 Milliare	0,001

Neues Badisches Feldmaaß.	
	□ Ruthen.
1 Morgen	400
1 Viertel, od. □ Centfuß	100
1 □ Ruthe	1
1 □ Schuh	0,01

§. 70.

Auch beym Quadratmaaß bedient man sich der nemlichen Zeichen oder Signaturen, die wir beym Längenmaaß kennen lernten. Ists Decimalquadratmaaß, so werden auch hier, wenn keine Sorten zwischen hinein fehlen, und jede Sorte 2 Stellen, nemlich Zehner und Einer hat, die Zahlen der verschiedenen Sorten mit ihren Signaturen unmittelbar nebeneinander geschrieben. Nur die höchste vorkommende Sorte kann hier auch nur Eine Stelle, d. h. nur Einer haben; z. B.

metrie vorangehen zu lassen. Nur beym letzten Abschnitt des gegenwärtigen Curses fiel jene Voraussetzung weg. Die Trigonometrie erfordert Kenntniß der Logarithmenlehre, und es wird daher dieser Abschnitt am füglichsten als ein Anhang zum dritten Curs der Zahlenlehre betrachtet, und unmittelbar nach diesem vorgetragen werden.

Der Verfasser.

Inhaltsanzeige.

Erster Abschnitt.

Berechnung, Vergleichung, Verwandlung, und Theilung der Drey- Vier- und irregulären Vielecke.

§. 69 — 79. Vom Flächen- oder Quadratmaaß.

§. 69. Begriff vom Flächen- oder Quadratmaaß. Verschiedene Arten desselben.

§. 70. Signaturen und ihr Gebrauch.

§. 71. Erste Vorbereitungsaufgabe: Zu finden, wie viel eine Zahl einer höhern Sorte in einer beliebig niedrigern betrage.

§. 72. Zweyte Vorbereitungsaufgabe: Zu finden, wie viel eine Zahl einer niedrigern Sorte in höhern Sorten ausmache.

§. 73. Dritte Vorbereitungsaufgabe: Mehrere Sorten auf Eine, und zwar auf die niedrigste der gegebenen zu bringen.

§. 74. Addition und Subtraction.

§. 75. Multiplication.

§. 76. Division.

§. 77. Zehntheiliges Quadratmaaß in gemeines und gemeines in zehntheiliges zu verwandeln.

§. 78. Verwandlung des Quadratmaaßes des einen Orts in das eines andern.

§. 79. Etwas weniges vom ehemals üblichen Riemenmaaß.

§. 80. — §. 83. Berechnung der Drey- Vier und irregulären Vielecke.

§. 80. Berechnung der Parallelogramme.

§. 81. Berechnung der Dreyecke.

§. 82. Berechnung der Trapeze.

§. 83. Berechnung jedes irregulären geradlinichten Vielecks, und der irregulären krummlinichten Flächenfiguren.

§. 84 — §. 86. Vergleichung der Drey = Vier= und irregulären Vielecke.

§. 84. Vergleichung der Parallelogramme überhaupt.

§. 85. Vergleichung der Dreyecke überhaupt, und der ähnlichen insbesondere.

§. 86. Vergleichung der ähnlichen irregulären Vielecke, und Anwendung hiervon auf alle geradlinichten Flächenfiguren, welche ähnlich sind.

§. 87 — §. 89. Verwandlung der Drey = Vier= und irregulären Vielecke.

§. 87. Geometrische Addition und Multiplication, Subtraktion und Division der Quadrate.

§. 88. Verwandlung eines Rektangels, eines Rhombus und Rhomboiden in ein Quadrat.

§. 89. Verwandlung der Dreyecke, Trapeze und irregulären Vielecke in Rektangel und Quadrate.

§. 90 — §. 92. Theilung der Drey. Vier = und irregulären Vielecke.

§. 90. Theilung der Parallelogramme.

§. 91. Theilung der Dreyecke.

§. 92. Theilung der Trapeze und der irregulären gerad-
linichten Vielecke.

Zweyter Abschnitt.

Von den Cirkeln und den regulären Viel-ecken.

§. 93. Einige Sätze von den bey Cirkeln vorkommenden Li-
nien und Winkeln.

§. 94. Einige leichte Aufgaben, deren Auflösung sich un-
mittelbar aus einigen Sätzen des vorigen §. ergibt.

§. 95. Von den Centri- und Polygonwinkeln eines regu-
lären Vielecks.

§. 96. Bildung der regulären Vielecke.

§. 97. Berechnung, Vergleichung, und Verwandlung der-
selben.

§. 98. Berechnung der Peripherie eines Cirkels aus seinem
Diameter, und seines Diameters aus seiner Peripherie.

§. 99. Berechnung, Vergleichung und Verwandlung der
Cirkelfläche.

§. 100. Vergleichung der Cirkelfläche mit dem Quadrat des Diameters, und daraus gefolgerte Berechnung ihres Inhalts, ohne die Peripherie zuvor suchen zu müssen.

§. 101. Berechnung der Stücke vom Cirkel.

§. 102. Etwas weniges von der Ellipse.

Dritter Abschnitt.

Von den Körpern.

(Stereometrie.)

§. 103. Etwas von der Lage der Linien und Flächen.

§. 104. Begriffe und Eintheilung der Körper.

§. 105. Von den Netzen der regulären und der senkrechten halbregulären Körper.

§. 106. Berechnung der Oberflächen der Körper, insbesondere der Kugel.

§. 107. Von der Gleichheit der gleichdicken und zugespitzten Körper.

§. 108. Vom Körper= oder Kubikmaaß.

§. 109. Berechnung des Inhalts der Körper.

§. 110. Etwas von der Vergleichung und Verwandlung der Körper.

Vierter Abschnitt.

Von der Berechnung der unbekannten Seiten und Winkel, wie auch der Höhe eines ebenen Dreyecks, wenn die zur Bildung desselben nöthigen Stücke gegeben sind.

(Ebene Trigonometrie.)

§. 111. Einleitung in die Trigonometrie.

§. 112. Möglichkeit, die 2 unbekannten Seiten eines Dreyecks aus der gegebenen dritten Seite und den Winkeln desselben, mittelst einer Chordentafel, zu berechnen.

§. 113. Gebrauch der halben Chorden statt der ganzen; Begriff vom Sinus eines Winkels; Satz von dem Ver=

hältniß der Seiten zu den Sinus der gegenüberstehenden Winkel.

§. 114. Sinus rechter und stumpfer Winkel; Vorzüge der Sinus vor der Chordenrechnung; Sinustafeln; Möglichkeit ihrer Berechnung; Logarithmen der Sinus; Cosinus, Tangente und Cotangente, Secante und Cosecante, Sinus Versus und Cosinus Versus eines Winkels.

§. 115. — §. 118. Wirkliche Berechnung der Seiten, Winkel und der Höhe eines Dreyecks aus hinlänglich bestimmenden Stücken desselben.

§. 115. Aus Einer gegebenen Seite und zwey gegebenen Winkeln den dritten Winkel, die zwey übrigen Seiten und die zur gegebenen Seite als Grundlinie gehörige Höhe eines Dreyecks zu finden, und zwar

A) überhaupt, wenn das Dreyeck ungleichseitig und schiefwinklicht, oder auch rechtwinklicht ist, der rechte Winkel aber der gegebenen Seite gegenüberliegt.

B) wenn das Dreyeck, gleichschenklicht ist, und zwar

a) wenn die zwey gleichen Winkel beyde an der gegebenen Seite,

b) wenn beyde an einer der unbekannten Seiten anliegen;

C) wenn das Dreyeck gleichseitig ist;

D) wenn es rechtwinklicht ist, und der rechte Winkel an der gegebenen Seite anliegt;

§. 116. Aus zwey gegebenen Seiten und Einem gegebenen Winkel, der einer jener bekannten Seiten gegenüberliegt, nebst der Art des der andern Seite gegenüberliegenden Winkels, die dritte Seite, die zwey übrigen Winkel und die zu einer der gegebenen Seiten als Grundlinie gehörige Höhe eines Dreyecks zu finden, und zwar

A) überhaupt, wenn der gegebene Winkel schief ist, und die zwey gegebenen Seiten ungleich sind;

B) wenn der gegebene Winkel abermals schief ist, die zwey gegebenen Seiten aber gleich sind;

C) wenn der gegebene Winkel ein rechter ist.

§. 117. Aus den drey gegebenen Seiten die zu einer derselben als Grundlinie gehörige Höhe und die drey Winkel eines Dreyecks zu finden, und zwar

A) überhaupt, wenn die gegebenen Seiten ungleich sind.

B) wenn zwey derselben gleich sin

C) wenn alle drey einander gleich sind.

§. 118. Aus zwey gegebenen Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel die zwey übrigen Winkel, die dritte Seite und die zu einer der gegebenen Seiten als Grundlinie gehörige Höhe eines Dreyecks zu finden, und zwar

A) überhaupt, wenn die gegebenen zwey Seiten ungleich sind, und der von ihnen eingeschlossene Winkel schief ist;

B) wenn die gegebenen Seiten abermals ungleich sind, der eingeschlossene Winkel aber ein rechter ist.

C) Wenn die gegebenen zwey Seiten gleich sind, und der eingeschlossene Winkel schief ist.

D) Wenn die gegebenen zwey Seiten gleich sind, und der eingeschlossene Winkel ein rechter ist.

Erster Abschnitt.

Berechnung, Vergleichung, Verwandlung und Theilung der Drey=, Vier= und irregulären Vielecke.

Vom Flächen= oder Quadratmaaß.

§. 69.

Wie wir uns zur Ausmessung der Linien, als Maaßstab, einer Linie bedient haben, so gebraucht man zur Ausmessung der Flächen, als Maaßstab, eine Fläche, die jedoch von der Art seyn muß, daß, wenn sie wiederholt an einander gelegt wird, keine leeren Zwischenräume entstehen. Dieß ist unter denjenigen Flächenfiguren, die durch Angabe einer einzigen Linie bestimmt werden können, beym

gleichseitigen Dreyeck, beym regulären Sechseck, und beym Quadrat der Fall. Man hat jedoch nur das letzte, nemlich das Quadrat, weil diese Figur in mehrern Hinsichten die bequemste zu dieser Absicht ist, als geometrischen Flächenmaaßstab angenommen, woher dann auch das geometrische Flächenmaaß den Namen Quadratmaaß erhalten hat.

Man denke sich ein Quadrat, dessen Seite eine Ruthe, ein anderes, dessen Seite ein Schuh, ein noch kleineres, dessen Seite nur ein Zoll ist ꝛc. so hat man Quadratruthen, Quadratschuhe, Quadratzolle ꝛc. und zwar gemeines Quadratmaaß, wenn die Seiten jener Quadrate die gemeine, hingegen Decimal quadratmaaß, wenn sie die zehntheilige Eintheilung haben.

Theilt man diese Seiten wirklich ein, und zieht (Fig. 1.) die Theilpunkte zusammen; so ist ersichtlich, daß, wenn AB z. B. eine zehnfüßige Längenruthe vorstellt, die zehnfüßige Quadratruthe 10 × 10 oder 100 Quadratschuhe enthalte. Hat hingegen die Längenruthe 16 Schuhe, so gehen 16 × 16 oder 256; hat sie 12 Schuhe, so gehen 12 × 12 oder 144, und hat sie 6 Schuhe, so gehen 6 × 6 oder 36 Quadratfuße auf die Quadratruthe. Da ferner im gemeinen Längenmaaß, die Ruthe mag 16, 12 oder 6 Schuhe lang seyn, es, vom Schuh an, von 12 zu 12, im Decimallängenmaaß aber durchaus von 10 zu 10 geht; so ist eben so begreiflich, daß jeder gemeine Quadratschuh 144 Quadratzolle, jeder gemeine Quadratzoll 144 Quadratlinien ꝛc. Der Decimalquadratschuh aber 100 Quadratzoll ꝛc. haben müsse.

Mit diesem Quadratmaaß könnte man nun auf die Art, die in der Folge gelehrt werden wird, eine jede Fläche ausmessen, und ihren Inhalt angeben; da dieß aber bey sehr großen Flächen, wie bey Feldern, ganzen Gemarkungen, oder gar bey ganzen Ländern auch sehr große und beschwerliche Zahlen verursachen würde; so nahm man noch zwey größere Flächenmaaßstäbe an, nemlich ein Feldmaaß für einzelne Felder und auch für ganze Gemarkungen, und ein Ländermaaß für ganze Länder, Reiche und Welttheile. Dieß letztere ist die Quadratstunde oder Quadratmeile, ein Quadrat das zur Seite eine einfache oder doppelte Wegstunde hat; das uns wichtigere Feldmaaß hingegen besteht aus mehr oder weniger Quadratruthen, und heißt in dem Badischen Unterland Morgen und im Oberland Juchert (Juch, auch hie und da Thau, wenn vom Wiesenfeld, oder Matten die Rede ist.)

Der Unterländer Morgen hält 160 Unterländer Quadratruthen, folglich das Viertel 40 Ruthen.

Die Hochberger Juchert 360 Hochberger Quadratruthen, ein Zweitel auf dem platten Lande $\frac{2}{3}$ davon, oder 240 Ruthen, in den Waldgegenden aber $\frac{3}{4}$, oder 270 Ruthen; eine Mannshauet $\frac{1}{8}$, oder 45 Ruthen.

Die Badenweilerer, Rötteler und Sausenburger Juchert 288 Quadratruthen; ein Zweitel im Badenweilerschen $\frac{3}{4}$ davon, oder 216 Ruthen, und im Röttel'schen und Sausenburgischen $\frac{2}{3}$, oder 192 Ruthen.

Die Baseler Juchert 140 Quadratruthen.

Da das Neufranzösische und das Wildsche *) Längenmaaß, ersteres ganz, letzteres beynahe durchaus von 10 zu 10 geht; so ist auch das Quadratmaaß beyder decimal, d. h. es geht von 100 zu 100. Dieses wird folgende Tabelle noch deutlicher machen.

Neufranzösisches Quadratmaaß.		Neues Badisches Quadratmaaß.	
	□ Meter.		□ Fuße.
1 □ Myriameter	100000000	1 □ Centfuß	10000
1 □ Kilometer	1000000	1 □ Ruthe	100
1 □ Hektometer	10000	1 □ Klafter	36
1 □ Dekameter	100	1 □ Elle	4
1 □ Meter	1	1 □ Schuh	1
1 □ Decimeter	0,01	1 □ Zoll	0,01
1 □ Centimeter	0,0001	1 □ Linie	0,0001
1 □ Millimeter	0,000001	1 □ Punkt	0,000001

Die Namen der Feldmaaße und die Abstufungen derselben sind:

---

*) Den 10ten des Novembers 1810 wurden Herrn Hofrath Wilds Vorschläge angenommen, die Einführung der neuen Maaße decretirt, und die Großherzoglichen Ministerien des Innern und der Finanzen mit der Vollziehung dieses Decretes beauftragt. Großherzoglich Badisches Regierungsblatt, 1810, Nro. 46.

Neufranzösisches Feldmaaß.	Are.
1 Myriare, od. □ Kilomet.	10000
1 Kilare	1000
1 Hektare, oder □ Hektomet.	100
1 Dekare	10
1 Are, oder □ Dekamet.	1
1 Deciare	0,1
1 Centiare, od. □ Meter	0,01
1 Milliare	0,001

Neues Badisches Feldmaaß.	□ Ruthen.
1 Morgen	400
1 Viertel, od. □ Centfuß	100
1 □ Ruthe	1
1 □ Schuh	0,01

§. 70.

Auch beym Quadratmaaß bedient man sich der nemlichen Zeichen oder Signaturen, die wir beym Längenmaaß kennen lernten. Ists Decimalquadratmaaß, so werden auch hier, wenn keine Sorten zwischen hinein fehlen, und jede Sorte 2 Stellen, nemlich Zehner und Einer hat, die Zahlen der verschiedenen Sorten mit ihren Signaturen unmittelbar nebeneinander geschrieben. Nur die höchste vorkommende Sorte kann hier auch nur Eine Stelle, d. h. nur Einer haben; z. B.

16 Ruthen, 75 Fuß, 33 Zoll, 21 Linien Decimalquadratmaaß:

$16^{\circ}75'33''21'''$ (10'q.)

2 Fuß, 10 Zoll, 99 Linien, 80 Scrupel Decimalquadratmaaß;

$2'10''99'''80^{IV}$ (10'q.)

Ists hingegen gemeines Quadratmaaß, so wird zwischen jede Sorte ein Punkt gesetzt; z. B.

127 Ruthen, 218 Schuh, 3 Linien gemeines Quadratmaaß von der 16füßigen Längenruthe:

$127^{\circ}.\ 218'.\ 3'''$ (16'q.)

Dieß Nemliche geschieht auch beym Decimalquadratmaaß da, wo zwischen hinein entweder ganze Sorten, oder auch nur die Zehner einer Sorte fehlen; z. B.

4 Ruthen, 20 Zoll, 9 Linien, 18 Scrupel Decimalquadratmaaß.

$4^{\circ}.\ 20''.\ 9'''\ 18^{IV}$ (10'q.)

Statt dem q kann man auch, um anzuzeigen, daß es Quadratmaaß seyn soll, ein kleines Quadrat setzen; z. B.

$3^{\circ}\ 14'\ 80''$ (10'□)

§. 71.

Wie viel irgend eine Zahl einer höhern Sorte in einer beliebigen niedrigern betrage, wird hier ebenso durch Multiplication mit den Eintheilungszahlen, wie beym Längenmaaß gefunden

Beyspiele.

1) Beym gemeinen Maaß.

Wie viel geben 114 sechzehnfüßige Quadratruthen Zoll?

Antwort: 4202496″ (16′q.)

```
   114°
   256 mal
   -------
   684
  570
 228
 --------
 29184′
   144 mal
 --------
 116736
116736
29184
---------
4202496″ (16′q.)
```

2) Beym Decimalmaaß.

Wie viel geben 8 Decimalquadratschuhe Linien?

Antwort: 80000''' (10'q.)

8'
100 mal

800''
1 00 mal

80000''' (10'q.)

Daher auch hier die leichte Regel beym Decimalmaaß:

Hänge für jede Signatur zwey Nullen an.

Durch diese Aufgabe sind wir im Stand, wie beym Längenmaaß, so auch hier eine Vergleichungstabelle zwischen dem Decimal- und gemeinen Quadratmaaß zu berechnen.

Decimal □ Maaß	Gemeines □ Maaß		
	16füßiges	12füßiges	6füßiges
1°	1°	1°	1°
100′	256′	144′	36′
10000″	36864″	20736″	5184″
1000000‴	5308416‴	2985984‴	746496‴
100000000^{IV}	764411904^{IV}	429981696^{IV}	74649600^{IV}

Das heißt die 12füßige □ Ruthe z. B. hat nach der gewöhnlichen Eintheilung 2985984, nach der Decimaleintheilung hingegen nur 1000000 Quadratlinien *)

§. 72.

Umgekehrt findet man durch die Division mit den Eintheilungszahlen, wie viel irgend eine Zahl einer niedrigern Sorte in höhern Sorten ausmache.

---

*) Die Anmerkung im §. 34. gilt auch hier.

Beyspiele.

1) Beym gemeinen Maaß.

Wie viel geben 1804312 Quadratlinien der 6füßigen Ruthe in höhern Sorten?

Antwort: 2°. 15′. 1″. 136‴ (6′q.)

```
1804312‴ | 144
 144     |------
-----    | 12529″ | 144
 364     | 1152   |------
 288     |------  | 87′  | 36
-----    |  1009  | 72   |----
  763    |  1008  |----- | 2°
  720    |------  | 15′  |
-----    |    1″
  431
  288
-----
  1432
  1296
------
   136‴
```

2) Beym Decimalmaaß.

Wie viel geben 8934397 Quadratlinien der Decimalruthe in höhern Sorten?

Antwort: 8°93′43″97‴ (10′q.)

89343|97‴	1|00		
	893|43″	1|00	
		8|93′	1|00
97‴	43″	93′	8°

Daher wieder die kurze Regel beym Decimalmaaß:

Signire von der rechten zur linken so, daß jede Signatur zwey Stellen bekommt.

§. 73.

Mehrere Sorten bringt man auf Eine, und zwar auf die niedrigste der gegebenen, wenn abermals mit den Eintheilungszahlen multiplicirt, und bey jeder Multiplication die etwa gegebene niedrigere Sorte addirt wird.

Beyspiele.

1) Beym gemeinen Maaß.

Wie viel geben 1° 131′. 100″ der 12füßigen Quadratruthe Quadratzolle?

Antwort: 39700″ (12′q.)

$$
\begin{array}{l}
1^{\circ} \\
144 \text{ mal } (+ 131') \\
\hline
275' \\
144 \text{ mal } (+ 100'' \\
\hline
1200 \\
1100 \\
275 \\
\hline
39700'' \text{ (12'q.)}
\end{array}
$$

2) Beym Decimalmaaß.

Wie viel geben $8^{\circ}.5'16''.3^{IV}$ der Decimalquadratruthe Quadratpunkte?

Antwort: 805160003^{IV} (10'q.)

$$
\begin{array}{l}
8^{\circ} \\
100 \text{ mal } (+ 5') \\
\hline
805' \\
100 \text{ mal } (+ 16'') \\
\hline
80516'' \\
100 \text{ mal} \\
\hline
8051600''' \\
100 \text{ mal } (+ 3^{IV}) \\
\hline
805160003^{IV} \text{ (10' q.)}
\end{array}
$$

Daher die Regel beym Decimalmaaß:

Fülle die fehlenden Stellen mit Nullen aus; oder bestimmter: Schreibe für jede Sorte, die ganz fehlt, zwey Nullen, und setze bey jeder, die nur Einer hat, diesen Einern eine Nulle vor. Daß dieß letztere bey der höchsten der gegebenen Sorten unnöthig sey, versteht sich von selbst.

§. 74.

Gemeines Quadratmaaß wird addirt und subtrahirt, wie andere mehrsortige Zahlen; das Decimalquadratmaaß aber wie Einsortige Zahlen, nachdem man zuvor die Posten, oder die Minuende und Subtrahende auf einerley niedrigste Sorte gebracht hat.

Beyspiele.

1) Beym gemeinen Maaß.

a) Wie viel geben 104°.3′.107‴ + 2°.143″ + 254′.4″ sechzehnfüßiges Quadratmaaß?

Antwort: 107°. 2′. 3″. 107‴ (16′q.)

	256	144	144
104°.	3′.	0″.	107‴
2.	0.	143.	0
	254.	4.	0
107°.	2′.	3″.	107‴ (16′q.)

b) Wie viel geben $104^{\circ}. 51'' - 13^{\circ}. 205'. 100''$ sechzehnfüßiges Quadratmaaß?

Antwort: $90^{\circ}. 50'. 95''$ (16'q.)

	256	144
104°.	0'.	51''
13.	205.	100
90°.	50'.	95'' (16'q.)

2) Beym Decimalmaaß.

a) Wie viel geben $6^{\circ}\ 13'. 12''' + 125^{\circ}. 18'' + 39'. 3''. 2'''$?

Antwort: $131^{\circ}\ 52'\ 21''\ 14'''$ (10'q.)

6°	13'	00''	12'''
125	00	18	00
	39	03	02
131°	52'	21''	14''' (10'q.)

b) Wie viel geben $368^{\circ}. 7'. 8'' - 367^{\circ}\ 92'. 5'''$?

Antwort: $15'\ 07''\ 95'''$ (10'q.)

368°	07'	08''	00'''
367	92	00	05
	15'	07''	95''' (10'q.)

§. 75.

Bey der Multiplication

1) des Quadratmaaßes mit einer unbenannten Zahl ist das Produkt ebenfalls Quadratmaaß.

a) Ist hier die Multiplicande gemeines Maaß, so wird sie wie jede andere mehrsortige Zahl behandelt; z. B.

Wie viel geben 3°. 28′. 6″ sechsfüßiges Quadratmaaß × 6?

Antwort: 22°. 24′. 36″ (6′q.)

	36	144
3°.	28′.	6″
		6
22°.	24′.	36″ (6′q.)

b) Ist die Multiplicande Decimalmaaß, so wird sie auf einerley niedrigste Sorte gebracht, und sodann mit ihr, wie mit einer Einsortigen Zahl verfahren; z. B.

Wie viel geben 18°. 9′ 12″. 3‴ × 5?

Antwort: 90° 45′ 60″ 15‴ (10′q.)

$$\begin{array}{r} 18^{\circ}\ 09'\ 12''\ 03''' \\ 5 \\ \hline 90^{\circ}\ 45'\ 60''\ 15'''\ (10'q.) \end{array}$$

2) Soll Längenmaaß mit Längenmaaß multiplicirt werden, so entsteht daraus im Produkt Quadratmaaß *)

a) Beym gemeinen Längenmaaß werden beyde Faktoren auf einerley niedrigste Sorte gebracht, sodann multiplicirt, und aus dem Produkt durch Division mit den Eintheilungszahlen die höhern Sorten gefunden; z. B.

Wie viel geben 3°. 15'. 1'' × 2°. 3'' sechzehnfüßiges Längenmaaß?

---

*) Eigentlich wird nicht Längenmaaß mit Längenmaaß multiplicirt, denn eine benannte Zahl kann nicht mit einer andern ebenfalls benannten multiplicirt werden; sondern wenn beyde Faktoren auf einerley niedrigste Sorte gebracht worden sind, so gibt der eine, der, den man zur Multiplicande macht, die Anzahl der kleinen Quadrätchen an, die auf Eine Reihe gehen, und der andere, der Multiplicator, ist die Zahl dieser Reihen. Es wird also im Grunde auch hier, wie beym ersten Fall, Quadratmaaß mit einer unbenannten Zahl multiplicirt, wodurch natürlich auch das Produkt Quadratmaaß werden muß.

Vergleiche die Anmerkung zu §. 35 des ersten Theils.

Antwort: $7^\circ.\ 242'.\ 63''$ (16′q.)

1.

$3^\circ.\ 15'.\ 1''$
16 mal (+15′)

63′
12 mal (+ 1″)

127
63

757″ (16′l.)

2.

$2^\circ.\ 3''$
16 mal

32′
12 mal (+3″)

67
32

387″ (16′l.)

3.

757″ (16′l.)
387

5299
6056
2271

292959″ (16′q.)

4.)

292959″		
288	144	
495	2034′	256
432	1792	7°
639	242′	
576		
63″		

b) Ganz ebenso verfährt man beym Decimalmaaß, nur daß hier die Arbeit viel leichter und kürzer ist; z. B.

Wie viel geben 6°. 4″ × 1° 3′ 2″ Decimallängenmaaß?

Antwort: 7° 97′ 28″ (10′q.)

```
 6°0′4″ (10′l.)
  132
 ----
 1208
1812
604
-----
7°97′28″ (10′q.)
```

§. 76

Bey der Division

1) des Quadratmaaßes durch eine unbenannte Zahl ist der Quotient Quadratmaaß.

a) Das gemeine Maaß wird hier wiederum wie jede andere mehrsortige Zahl behandelt; z. B.

Wie viel geben 18°. 102′. 106″ zwölffüßiges Quadratmaaß in 8 gleiche Theile vertheilt?

Antwort: 2°. 48′. 121¼″ (12′q.)

```
       144   144
18°.  102'.  106''| 8
16                |------------------
----              | 2°. 48'. 121 1/4'' (18/q.)
 2°
144 mal (+ 102')
------------
390'
32
----
 70
 64
----
  6'
144 mal ( + 106'')
------------
970''
8
----
17
16
----
 10
  8
----
2/8 = 1/4''
```

b) Das Decimalmaaß wird auf einerley niedrigste Sorte gebracht, und darein, wie in eine Einsortige Zahl dividirt; z. B.

Wie viel geben 45°. 3''. 6''' (10/q.) dividirt durch 18?

Antwort: 2° 50' 00'' 17''' (10/q.)

b) Ganz ebenso verfährt man beym Decimalmaaß, nur daß hier die Arbeit viel leichter und kürzer ist; z. B.

Wie viel geben 6°. 4'' × 1° 3' 2'' Decimallängenmaaß?

Antwort: 7° 97' 28'' (10'q.)

```
  6°0'4'' (10'l.)
  132
 ------
  1208
 1812
 604
 ---------
 7°97'28'' (10'q.)
```

§. 76

Bey der Division

1) des Quadratmaaßes durch eine unbenannte Zahl ist der Quotient Quadratmaaß.

a) Das gemeine Maaß wird hier wiederum wie jede andere mehrsortige Zahl behandelt; z. B.

Wie viel geben 18°. 102'. 106'' zwölffüßiges Quadratmaaß in 8 gleiche Theile vertheilt?

Antwort: 2°. 48'. $121\frac{1}{4}$'' (12'q.)

```
    144    144
     ⌣      ⌣
18°. 102'. 106'' | 8
16               |_____________
___              | 2°. 48'. 121 ¼'' (12'q.)
 2°
144 mal (+ 102')
________________
390'
32
___
 70
 64
___
  6'
144 mal (+ 106'')
_________________
970''
 8
___
 17
 16
___
 10
  8
___
2/8 = 1/4''
```

b) Das Decimalmaaß wird auf einerley niedrigste Sorte gebracht, und darein, wie in eine Einsortige Zahl dividirt; z. B.

Wie viel geben 45°. 3''. 6''' (10'q.) dividirt durch 18?

Antwort: 2° 50' 00'' 17''' (10'q.)

b) Ganz ebenso verfährt man beym Decimalmaaß, nur daß hier die Arbeit viel leichter und kürzer ist; z. B.

Wie viel geben 6°. 4″ × 1° 3′ 2″ Decimallängenmaaß?

Antwort: 7° 97′ 28″ (10′q.)

```
  6°0′4″ (10′l.)
   132
 ------
  1208
 1812
 604
 --------
 7°97′28″ (10′q.)
```

§. 76.

Bey der Division

1) des Quadratmaaßes durch eine unbenannte Zahl ist der Quotient Quadratmaaß.

a) Das gemeine Maaß wird hier wiederum wie jede andere mehrsortige Zahl behandelt; z. B.

Wie viel geben 18°. 102′. 106″ zwölffüßiges Quadratmaaß in 8 gleiche Theile vertheilt?

Antwort: 2°. 48′. $121\frac{1}{4}$″ (12′q.)

$$\begin{array}{l} \quad\quad\; 144 \quad 144 \\ 18^{\circ}.\; 102'.\; 106'' \,\Big|\, 8 \\ \underline{16} \quad\quad\quad\quad\quad\quad\; 2^{\circ}.\; 48'.\; 121\tfrac{1}{4}'' \text{ (12'q.)} \\ 2^{\circ} \\ \underline{144 \text{ mal } (+102')} \\ 390' \\ \underline{32} \\ 70 \\ \underline{64} \\ 6' \\ \underline{144 \text{ mal } (+106'')} \\ 970'' \\ \underline{8} \\ 17 \\ \underline{16} \\ 10 \\ \underline{8} \\ \tfrac{2}{8} = \tfrac{1}{4}'' \end{array}$$

b) Das Decimalmaaß wird auf einerley niedrigste Sorte gebracht, und darein, wie in eine Einsortige Zahl dividirt; z. B.

Wie viel geben 45°. 3''. 6''' (10'q.) dividirt durch 18?

Antwort: 2° 50' 00'' 17''' (10'q.)

```
45° 00′ 03″ 06‴  | 18
36               |----------------------------
--               | 2° 50′ 00″ 17‴ (10′q.)
 90
 90
 --
   0030
     18
     --
    126
    126
    ---
      0
```

2) Soll Quadratmaaß durch Quadratmaaß dividirt werden, so erhält man zum Quotienten eine unbenannte Zahl.

a) Beym gemeinen Maaß.

Dividende und Divisor werden auf einerley niedrigste Sorte gebracht, und dann wird gewöhnlich dividirt; z. B.

Wie viel geben 2°. 104″ zwölffüßiges Quadratmaaß, dividirt durch 88′ desselben Maaßes?

Antwort: $3\frac{3560}{12672}$.

```
1.                            2.

2°. 104″ (12′q.)              88′ (12′q.)
144 mal                       144 mal
-------                       -------
288′                          352
144 mal (+ 104″)              352
-------                       88
1256                          -------
1152                          12672″ (12′q.)
288
-------
41576″ (12′q.)
```

3.

41576'' (12'q.)
38016 | 12672'' (12'q.)
3560 | 3 $\frac{3560}{12672}$.
12672

b) Beym Decimalmaaß.

Verfahre wie in lit. a. z. B.

Wie viel geben 6°. 5' 23'' dividirt durch 88'. 2''?

Antwort: 6 $\frac{7711}{8802}$

6°05'23'' | 88'02''
5 28 12 | 6 $\frac{7711}{8802}$
77 11
88 02

3) Wird aber Quadratmaaß durch Längenmaaß dividirt, so ist der Quotient Längenmaaß *)

a) Beym gemeinen Maaß.

---

*) Die obige Bemerkung bey der Multiplication muß auch hier auf die Division angewendet werden.

Dividende und Divisor werden auf einerley niedrigste Sorte gebracht, sodann dividirt, und aus dem Quotienten die höhern Sorten des Längenmaaßes, wie gewöhnlich, gesucht; z. B.

Wie viel geben 25°. 16'. 1'' sechzehnfüßiges Quadratmaaß, dividirt durch 3°. 10'. 2'' sechzehnfüßiges Längenmaaß?

Antwort: 6°. 14'. $3\frac{451}{698}$''. (16'l.)

1.

25°. 16'. 1'' (16'q.)
256 mal (+ 16')

166
125
50

6416'
144 mal (+ 1'')

25665
25664
6416

923905'' (16'q.)

2.

3°. 10'. 2'' (16'l.)
16 mal (+ 10')

58'
12 mal (+ 2'')

118
58

698'' (16'l.)

3 und 4.

923905''	698''		
698	$1323\frac{451}{698}''$ (16'l.)		
2259	12	12	
2094	12	110'	16
1650	12	96	6°
1396	$3\frac{451}{698}''$	14'	
2545			
2094			
$\frac{451}{698}''$			

b) Beym Decimalmaaß.

Die Arbeit ist die nemliche, nur leichter und kürzer; z. B.

Wie viel geben 125° 18'. 3'' Decimalquadratmaaß, dividirt durch 5°. 2'' Decimallängenmaaß?

Antwort: 24° 9' $3\frac{317}{502}''$ (10'l.).

```
125°18'03'' (10'q.)
100 4       | 5°0'2'' (10'l.)
-----       |-----------------
 24 78      | 24°9'3 317/502'' (10'l.)
 20 08      |
 -----
  4 700
  4 518
  -----
   1823
   1506
   ----
   317''
   ---
   502
```

§. 77.

Zehntheiliges Quadratmaaß wird in gemeines und gemeines in zehntheiliges verwandelt, wenn man die Ruthen, die in beyderley Maaß gleich sind, abschneidet, und die Verwandlung des Rests, nachdem er auf die niedrigste Sorte gebracht worden ist, mit Hilfe der Tabelle im §. 71, nach Z. L. §. 110, Beysp. 2, vornimmt.

Beyspiele.

1) Zehntheiliges in gemeines.

Wie viel geben 98°17'24''13''' (10'q.) in 16füßigem Quadratmaaß?

Antwort: $98°.44'.19''.119\,\frac{927808}{1000000}'''$ (16'q.)

```
          1.
          ‿
       17'24''13'''
       530 84 16
     ─────────────────
       103 44 78
       172 41 3
      6896 52
    137930 4
   5172390
  862065
  ─────────────────
2und3.)915239|9278 08|1|000000
                     ─────────
                     |915239'''|144
                     |8 64     ───────
                     ────────  |6355''|144
                        512    |576   ───────
                        432    ───────|44'
                     ────────   595
                        803     576
                        720    ──────
                     ────────   19''
                        839
                        720
                     ────────
                        119'''
```

2) Gemeines in zehntheiliges.

Wie viel geben 21°. 9'. 87'' sechsfüßiges Quadratmaaß, im Decimalquadratmaaß?

Antwort: 21°26'67 $\frac{4272}{5184}$'' (10'q.)

1.

$$144 \text{ mal } (+ 87'')$$
$$9'$$

1383'' (6'q.) !

1 0000

2.) 1383 0000 | 51 84 → 26'67 $\frac{4272''}{5184}$ (10'q.)

```
1383 0000 | 51 84
1036 8    |------
--------- | 26'67 4272''/5184 (10'q.)
 346 20
 311 04
---------
  35 160
  31 104
---------
   4 0560
   3 6288
---------
   4272''/5184
```

§. 78.

Um Quadratmaaß des einen Orts in das eines andern zu verwandeln, braucht man folgende Tabellen:

I.

Tabelle der uns wichtigsten Quadratschuhe, in Decimal-Secundscrupel des alten Pariser Quadratschuhes ausgedruckt *)

(□ Meter, oder Centiare	—	947681746)
Neuer Badischer □ Schuh	—	85291320
Alter Karlsr. □ Schuh	—	73496329
Hochberger □ Schuh	—	71673156
Badenw. Röt. und Saus.	—	88510464
Freyburger	—	94750756
Rheinl. in der Pfalz	—	93354244
Würtemberger	—	77774761
Baseler	—	84364225
Konstanzer	—	87366409

Vermittelst dieser Tabelle lassen sich nach Z. L. §. 110, Beysp. 1, nicht nur Quadratschuhe, sondern auch Ruthen, oder Ruthen und Schuhe des einen Orts ins Quadratmaaß eines andern verwandeln, sobald man in den beyden letz-

*) Dieser und den zwey folgenden Tabellen liegen die Längenmaaße, so wie sie im §. 41 angegeben wurden, zu Grund. Nur der Meter und der neue Badische Schuh wurden hierbey genauer, jener durch 3078444, dieser durch 923533 Quartscrupel ausgedruckt.

tern Fällen die gegebenen Ruthen zuvor in Schuhe verwandelt hat.

2.

Tabelle der uns wichtigsten Quadratruthen.

(Deciare	—	9476817461)
(□ Dekamet. oder Are	—	94768174611)
Neue Bad. □ Ruthe	—	8529132020
Alte Karlsr. □ Ruthe	—	18815060224
Hochberger	—	10320934464
Badenw. Röt. und Sausenb.	—	12723506816
Baseler	—	21597241600

Mit Hilfe dieser Tabelle lassen sich □ Ruthen, nach dem oben angeführten §. der Zahlenlehre in einander verwandeln, ohne daß sie zuvor in □ Schuhen ausgedruckt werden müssen.

3.

Tabelle der uns wichtigsten Feldmaaße.

Decare	—	947681746113
Hektare (□ Hektomet.)	—	9476817461136
Kilare	—	94768174611360
Myriare (□ Kilomet.)	—	947681746113600
N. B. Vrtl (□ Centfuß)	—	852913202089

N. B. Morgen	—	3411652808356
Alter Unterl. Morgen	—	3010409635840
Hochb. Juchert	—	3715536407040
Bad. Röt. Sauf. Juchert	—	3664369963008
Baseler Juchert	—	3023613824000

Diese Tabelle wird eben so wie die erste und zweyte gebraucht, wobey es sich übrigens von selbst versteht, daß bey dieser sowohl als bey den beyden vorigen, wenn keine große Genauigkeit nöthig ist, nicht alle Ziffern der angegebenen Zahlen genommen werden müssen, sondern von den beyden, die man braucht, je nachdem es der jedesmalige Grad der Genauigkeit erfordert, gleichviel Ziffern von der Rechten zur Linken abgeschnitten, und außer Rechnung gelassen werden können.

4.

Soll neues Badisches Maaß in neufranzösisches, oder umgekehrt verwandelt werden; so kann dieß zwar auch vermittelst obiger Tabellen, aber weit leichter und schneller mit Hilfe folgender Zahlen geschehen:

Es ist

1 neuer Bad. Morgen	=	36 Are
1 neues Bad. Viertel	=	9 —
1 neue Bad. □ Ruthe	=	9 Centiare
1 neuer Bad. □ Schuh	=	$\frac{9}{100}$ —

Auch sind

109 alte Unterl. Morgen nahe	=	96 neue Bad.	
67 Badenw. □ Ruthen	=	100 — —	
40 — Viertl.	=	43 — —	
67 — Jucherte	=	72 — —	

§. 79.

Außer dem Quadratmaaß, mit dem wir uns bisher beschäftigt haben, gibt es noch ein anderes Flächenmaaß, dessen man sich ehmals häufig bediente, und welches Riemenmaaß heißt. *)

Man theile zwey einander gegenüberstehende Seiten einer □ Ruthe in eben so viel gleiche Theile, als die Längenruthe Fuße hat, und ziehe die Theilpunkte zusammen; so entstehen bey der 16füßigen Quadratruthe 16, und bey der 12füßigen 12 Riemen, von welchen jeder 1° lang, und 1′ breit ist, und ein Riemenfuß genannt wird. Mit einem solchen Riemenfuß verfahre man ebenso, d. h. man theile die kürzere Seiten des Riemens, welche 1′ lang

*) Da in unsern Gegenden nirgends mehr nach Riemenmaaß gearbeitet wird, dürfte es hinlänglich seyn, einen deutlichen Begriff davon zu haben, seine Eintheilung zu kennen, und zu wissen, wie es in Decimalquadratmaaß verwandelt wird, indem es zuweilen in alten Kaufbriefen, Lagerbüchern, Theilungsakten 2c. noch vorkommen kann.

sind, in 12 gleiche Theile, und ziehe die Theilpunkte zusammen; so erhält man auf den Riemenfuß 12 Riemenzolle, von welchen jeder 1° lang und 1'' breit ist ꝛc.

Auf diese Art bekommt das Riemenmaaß die nemliche Eintheilung, wie das gemeine Längenmaaß, und kann, rücksichtlich der Eintheilung, mit dem Decimal = Quadratmaaß durch folgende Tabelle verglichen werden.

Decimal □ Maaß	Riemen od. Marchmaaß. 16füßiges.	12füßiges.
1°	1°	1°
100'	16'	12'
10000''	192''	144''
1000000'''	2304'''	1728'''
100000000^{IV}	27648^{IV}	20736^{IV}

Soll nun Riemenmaaß in Decimal = Quadratmaaß, oder umgekehrt verwandelt werden; so schneidet man die etwa gegebenen Ruthen, weil sie in beyden Maaßen gleich sind, ab, und verwandelt, mit Hülfe dieser Tabelle, den Rest nach §. 110 der 3. L. Beysp. 2.

Beyspiel.

Wie viel geben 7°. 3'. 11'' sechzehnfüßiges Riemenmaaß in Decimal = Quadratmaaß?

Antwort: 7° 24' 47 $\frac{176}{192}$'' (10'q.)

$$\begin{array}{l} 1. \\ 3' \\ 12 \text{ mal } (+11'') \\ \hline 47'' \end{array}$$

2 u. 3.) 10000

$$\begin{array}{r|l} 470000 & 192 \\ \hline 384 & 24'47\tfrac{176}{192}'' \ (10'q.) \\ \hline 860 & \\ 768 & \\ \hline 920 & \\ 768 & \\ \hline 1520 & \\ 1344 & \\ \hline \tfrac{176}{192}'' & \end{array}$$

Ehemals verstand man wohl auch unter einer Riemenruthe einen Riemen, der aus eben so viel in einer geraden Linie an einander gelegten □ Ruthen bestand, als die Längenruthe Fuße hatte, und hierauf gründet sich die Entstehung unsrer ältern Feldmaaße. Es ist nemlich 1 Unterländer Morgen = 10 Riemenruthen im ebenerwähnten Sinn, und folglich gehen, da 1 Riemenruthe = 16 Quadratruthen ist, 10 × 16 = 160 Quadratruthen auf einen solchen Morgen. Die Hochberger Juchert ist = 30 Riemenruthen, jede zu 12 Quadratruthen, also 30 × 12 = 360 Quadratruthen. Die Badenw. Röt. und Sausenberger Juchert = 24 Riemenruthen zu 12 Qua-

Quadratruthen, folglich = 24 × 12 = 288 Quadratruthen.

Es gab auch noch ein anderes Riemenmaaß, bey dem die Riemen nicht bloß der Breite, sondern auch der Länge nach abnahmen, und ihre Namen nicht von der Breite, sondern von der Länge bekamen. Eine Riemenruthe war 1° lang und 1′ breit, ein Riemenfuß 1′ lang und 1″ breit ꝛc. Da aber dieses Maaß in den wenigsten Gegenden allgemein üblich war, so wollen wir uns nicht dabey aufhalten.

Berechnung der Drey-, Vier- und irregulären Vielecke.

§. 80.

1) Mißt man (Fig. 2.) die ungleichen Seiten eines Rektangels, FG und FA, die Grundlinie und Höhe desselben, mit einerley Maaßstab CD aus, findet man z. B., daß CD in FG viermal und in FA dreimal enthalten ist; so ist die Anzahl der kleinen Quadrate 1, 2, 3 ꝛc. welche auf dem Rektangel Platz, und alle CD zur Seite haben = 3 × 4 = 12. Denn eben so oft, als CD in FG enthalten ist, eben so viel Quadrate, deren Seite CD ist, können neben einander auf FG stehen, und eben so oft, als

CD in FA enthalten ist, eben so viele solcher Reihen von Quadraten sind in dem Rektangel möglich.

Es wird demnach der Inhalt eines jeden rechtwinklichten Parallelograms, eines Rektangels oder eines Quadrats gefunden, wenn man die mit einerley Längenmaaß ausgemessene Grundlinie und Höhe desselben in einander multiplicirt.

Bediente man sich hierbey eines bis auf Scrupel getheilten Längenmaaßstabes, so wäre CD = 1^{IV}, womit sich, da diese Länge sehr klein ist, FG und FA in jedem Fall, ohne beträchtlichen Fehler für die Ausübung, vollkommen ausmessen lassen, d. h. es kann das Maaß von FG und FA in ganzen Zahlen, deren Einheiten Scrupel sind, angegeben werden. Inzwischen wird in den meisten Fällen eine bis auf Linien, ja nicht selten eine nur bis auf Zolle gehende Genauigkeit der Absicht, die man hat, genügen.

Beym Quadrat ist die Höhe der Grundlinie gleich; man wird daher den Inhalt desselben finden, wenn man eine von den 4 Seiten mißt, und sie mit sich selbst multiplicirt.

2) Auch bey den beyden schiefwinklichten Parallelogrammen, dem Rhombus und Rhomboiden gilt dieselbe Regel der Berechnung: Multiplicire die Grundlinie mit der Höhe.

Der Beweis ergibt sich leicht aus §. 58, Nro. 1, lit. b., nur hüte man sich, bey der Ausübung dieser Regel in den Irrthum zu verfallen, daß die Seitenlinie eines schiefwinklichten Parallelogramms die Höhe desselben sey (§ 57.)

Wirkliche Berechnung der 4 Parallelogramme; Berechnung der Grundlinie und der Höhe, wenn der Inhalt und eine von jenen beyden Linien gegeben sind.

§. 81.

Der Inhalt eines jeden Triangels wird gefunden, wenn man die Grundlinie mit der Höhe multiplicirt, und ins Produkt mit 2 dividirt — eine Regel, deren Richtigkeit aus §. 58, Nro. 2. genugsam erhellt. Auch kann man die halbe Grundlinie mit der ganzen Höhe, oder die ganze Grundlinie mit der halben Höhe multipliciren, wodurch, wenn sich das Maaß der einen oder der andern jener Linien ohne Rest durch 2 dividiren läßt, ein kleiner Vortheil im Rechnen erhalten wird.

An sich ist es einerley, welche der Seiten man als Grundlinie annimmt; auf dem Felde ist aber die Wahl hierbey nicht selten durch mancherley Umstände beschränkt. Bey stumpfwinklichten Dreyecken wählt man, wo möglich, die längste Seite, um der sonst nöthigen Verlängerung der Grundlinie (§. 57.) überhoben zu seyn, und bey rechtwinklichten ist es vortheilhaft, die beyden Katheten als

Grundlinie und Höhe anzunehmen, weil man dann die letztere nicht besonders ziehen muß. *)

Wirkliche Berechnung der Dreyecke; Berechnung der Grundlinie aus dem Inhalt und der Höhe, und der Höhe aus dem Inhalt und der Grundlinie.

---

*) Beym gleichschenklichten Dreyeck wird, wenn man die ungleiche Seite als Grundlinie annimmt, die Höhe erhalten, wenn vom Quadrat des Schenkels das Quadrat der halben Grundlinie abgezogen, und aus dem Rest die Quadratwurzel gezogen wird. (§. 59.) Wie dieß auch ohne Rechnung geschehen könne, wird im §. 87. Nro. 3 gezeigt werden.

Sind alle 3 Seiten eines Dreyecks gegeben, so kann der Inhalt desselben durch bloße Berechnung gefunden werden. Man sucht entweder durch eine leichte Anwendung des Pythagoräischen Lehrsatzes die Höhe des Dreyecks, die man sich auf eine als Grundlinie angenommene Seite gezogen denkt, und verfährt dann nach der gewöhnlichen, oben vorgetragenen Regel; oder

1) man addirt die 3 Seiten, und halbirt ihre Summe,

2) zieht von dieser halben Summe jede Seite besonders ab,

3) multiplicirt die in Nro. 2 gefundene drey Reste in einander, und dieß Produkt noch einmal mit der halben Summe,

4) und zieht endlich aus dem letzten Produkt die Quadratwurzel, so ist diese der verlangte Inhalt.

§. 82.

1) Die Berechnung eines Paralleltrapezes ließe sich zwar eben so, wie die eines gemeinen Trapezes, vornehmen; inzwischen gestattet der Parallelismus zweyer seiner Seiten noch eine andere Berechnungsart, welche in folgender Regel enthalten ist:

Addire die beyden parallelen Seiten, multiplicire die Summe mit der Weite der Parallelen, und dividire ins Produkt mit 2.

Wird (Fig. 3.) in dem Paralleltrapez CEDH mit der Seite CE die Parallele FD gezogen, so theilt diese das Paralleltrapez in das Parallelogramm CEDF und in das Dreyeck FDH. Nun ist

d. Inh. des erstern $= CF \times DG$ (§ 80.)

d. Inh. des letztern $= \frac{FH \times DG}{2}$ (§. 81.)

und d. Inh. beyder $= \frac{2.CF \times DG}{2} + \frac{FH \times DG}{2}$

oder $= \frac{(CF + CF + FH) \times DG}{2}$

oder $= \frac{(CF + CH) \times DG}{2}$

oder $= \frac{(ED + CH) \times DG}{2}$

2) Jedes gemeine Trapez ADLB (Fig. 4.) wird durch eine Diagonale DB in zwey Dreyecke ADB und DLB zerlegt, deren Inhalt zusammen = dem Inhalt des Trapezes ist. Betrachtet man nun die Diagonale DB als die gemeinschaftliche Grundlinie beyder Dreyecke, und zieht darauf die Höhen AG und LH; so wird die Berechnung durch folgende Regel geschmeidiger:

Addire die beyden Perpendikel, multiplicire die Summe mit der Diagonale, und dividire ins Produkt mit 2.

Daß man auch hier sowohl als beym Paralleltrapez, statt ins Produkt, in einen der beyden Faktoren mit 2 dividiren, und dadurch, wenn sich dieses ohne Rest thun läßt, die Rechnung noch um etwas abkürzen kann, folgt unmittelbar aus §. 81.

Nicht immer ist es möglich, eine solche Diagonale zu ziehen, daß beyde Perpendikel innerhalb die Figur fallen. Hier wird (Fig 5.) die Diagonale ON unbestimmt nach I verlängert, und auf diese Verlängerung die Höhe ML und HK gezogen, deren Summe aber dennoch nur mit ON, und nicht mit OK oder OI multiplicirt werden darf (§. 57.)

Auf dem Papier können die zu messenden Höhenperpendikel, ohne daß man nöthig hat, sie wirklich zu ziehen, sogleich in den Zirkel genommen werden. Man setzt zu diesem Ende, z. B. in H ein, und eröffnet den Zirkel so

weit, daß damit ein Bogen op gezogen werden kann, welcher die Linie OI nur in dem Punkt K berührt (§. 52. Nro. 7.)

Wirkliche Berechnung beyderley Trapeze. Aus dem Inhalt und den parallelen Seiten eines Paralleltrapezes, dessen Höhe, d. i. die Weite der Parallelen; aus dem Inhalt, der Höhe und der Differenz der parallelen Seiten diese Seiten selbst *); aus dem Inhalt eines gemeinen Trapezes und der Summe der beyden Höhenperpendikel die Diagonale, und endlich aus dem Inhalt, der Diagonale und der Differenz der Perpendikel diese Perpendikel selbst zu finden.

§. 83.

Leicht ist es nun, jedes geradlinichte irreguläre Vieleck zu berechnen. Welche von den hier möglichen Arten der Berechnung aber in jedem vorkommenden Falle die vortheilhaftere sey, müssen die Umstände entscheiden.

1) Zerlege (Fig. 6) das zu berechnende Vieleck durch schickliche Diagonalen in Drey-

*) Aus der Summe und der Differenz zweyer Größen werden diese Größen selbst gefunden, wenn man zur halben Summe die halbe Differenz addirt, welches die größere, oder wenn man von der halben Summe die halbe Differenz subtrahirt, welches die kleinere Größe gibt.

ecke und Trapeze, rechne jedes Stück besonders aus, und addire die einzelnen Inhalte.

2) Fälle (Fig. 7) auf eine dazu schickliche Seitenlinie, oder (Fig. 8) auf eine in dieser Absicht gezogene Diagonale von jedem ihr gegenüberliegenden Winkelpunkt Perpendikel, rechne die dadurch entstehende Paralleltrapeze und Dreyecke einzeln aus, und addire gleichfalls ihre Inhalte.

Fällt hierbey, wie in Fig. 10, ein Perpendikel FH außerhalb die Figur, so wird das Paralleltrapez EDFH, aber auch das Dreyeck GFH berechnet, dieses von jenem abgezogen, und die sich hierdurch ergebende Differenz zu den übrigen Stücken der zu berechnenden Figur addirt.

3) Beschreibe (Fig. 9) um das auszurechnende Vieleck ein schickliches Parallelogramm, suche den Inhalt desselben nach §. 80, aber auch die Inhalte von den Stücken 1, 2, 3 rc. nach §. 81 u. 82, und ziehe endlich die Summe der letztern von dem Inhalt des Parallelogramms ab.

Wirkliche Berechnung der irregulären geradlinichten Vielecke nach einer jeden dieser Berechnungsarten; Anwendung der beyden letztern auf die Ausrechnung irregulärer

krummlinichter Flächenfiguren — jenes und dieses mit Beziehung auf §. 67.

Vergleichung der bisher abgehandelten Flächenfiguren.

§. 84.

1) Bey zwey ungleichen Parallelogrammen, welche gleiche Höhen aber ungleiche Grundlinien haben, ist das kleinere im größern eben so oft als die Grundlinie des erstern in der des zweyten enthalten.

Es sey z. B. die Höhe beyder Parallelogramme = 3, die Grundlinie des größern = 12, die des kleinern = 4; so ist der Inhalt des erstern, nach §. 80, = 3 × 12 = 36, und der Inhalt des andern = 3×4 = 12, mithin das kleinere 12 im größern 36 eben so oft, als die Grundlinie des kleinern 4 in der Grundlinie des größern 12, nemlich 3 mal enthalten. Oder allgemein: Wenn zwey Produkte einen Faktor gemeinschaftlich haben, so muß das kleinere im größern eben so oft, als der andere Faktor des erstern im andern Faktor des zweyten enthalten seyn. Und folglich ist auch bey zwey ungleichen Parallelogrammen, welche

gleiche Grundlinien, aber ungleiche Höhen haben, das kleinere im größern eben so oft enthalten, als die Höhe von jenem in der Höhe von diesem.

2) Haben hingegen zwey gleiche Parallelogramme ungleiche Grundlinien und Höhen, so wird die Grundlinie des erstern, wenn sie die kleinere ist, in der größern Grundlinie des zweyten eben so oft, als die kleinere Höhe des zweyten in der größern Höhe des erstern enthalten seyn müssen.

Auch hiervon ist der Grund leicht einzusehen. Wenn nemlich zwey gleiche Produkte, 24 und 24, ungleiche Faktoren haben, z. B. das erstere die Faktoren 4 und 6, das letztere die Faktoren 8 und 3 (wo 4 und 8 die Grundlinien, und 6 und 3 die Höhen vorstellen mögen) so muß 4 in 8 eben so oft, als 3 in 6 enthalten seyn, weil bey ungleichen Faktoren nur dann eine Gleichheit der Produkte statt finden kann, wenn z. B. der Multiplicator beym erstern das eben so vielfache vom Multiplicator beym zweyten, als es die Multiplicande beym zweyten von der Multiplicande beym erstern ist.

§. 85.

1) Da, nach §. 58, Nro. 2, jeder Triangel die Hälfte von einem Parallelogramm ist, das mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat; so gilt, was im

vorigen §. Nro. 1 und 2 von den Parallelogrammen behauptet und bewiesen wurde, auch von ihren Hälften, den Dreyecken. Ferner ist

2) Bey zwey ähnlichen Dreyecken das kleinere im größern eben so oft enthalten, als das Quadrat irgend einer Seite des erstern im Quadrat der gleichnamigten Seite des andern, oder auch als das Quadrat der Höhe des erstern im Quadrat der Höhe des andern.

Wenn (Fig. 11) die Dreyecke ADC und EHG ähnlich, und BD und FH die Höhenperpendikel derselben sind; so ist, nach §. 60, der ∠ bey C = dem ∠ G. Da nun ferner der rechte ∠ CBD = dem rechten ∠ GFH, so sind auch (§. 62, Nro. 6.) die Dreyecke BDC und FHG ähnlich; folglich ist

EG in AC so oft, als HG in DC und

HG in DC so oft, als FH in BD, mithin auch

EG in AC so oft, als FH in BD enthalten.

Nun sind bekanntlich, wenn man bey zwey gleichen Quotienten die Divisoren sowohl als die Dividenden mit einerley Größe multiplicirt, die neuen Quotienten abermals

gleich *) und folglich wird auch, indem die Hälften eben so oft als die Ganzen in einander enthalten sind, **)

a) $EG \times EG$ in $AC \times AC$ so oft, als $\frac{EG \times FH}{2}$ in $\frac{AC \times BD}{2}$

u. b) $\frac{EG \times FH}{2}$ in $\frac{AC \times BD}{2}$ so oft, als $FH \times FH$ in $BD \times BD$ enthalten seyn.

2. 86.

Auch bey je zwey ähnlichen irregulären Vielecken ist das kleinere im größern eben so oft, als das Quadrat einer Seite des erstern im Quadrat der gleichnamigten Seite des andern enthalten.

Es sey (Fig. 12) das irreguläre Fünfeck LGHIK ∽ dem Fünfeck ABCDE; so läßt sich, wenn man aus zwey gleichnamigten Winkelpunkten H und C die Diagonalen HL und HK, deßgleichen CA und CE zieht, aus §. 60 und §. 62, Nro. 2 mit Leichtigkeit erweisen, daß auch das Dreyeck 1 ∽ dem Dreyeck I, das Dreyeck 2 ∽

*) Z. L. §. 240. Nro. 5.

**) Z. L. §. 240. Nro. 6.

dem Dreyeck II, und das Dreyeck 3 ∽ dem Dreyeck III seyn müsse. Nun ist, nach §. 85,

1 in I so oft, als LG × LG in AB × AB
2 in II so oft, als LK × LK in AE × AE
3 in III so oft, als KI × KI in ED × ED, aber auch, weil die Fünfecke ähnlich sind, nach §. 60,

LG in LK so oft, als AB in AE, oder
LG in AB so oft, als LK in AE *)
und LG × LG in AB × AB so oft, als LK × LK in AE × AE

enthalten, indem, wenn man bey zwey gleichen Quotienten die Divisoren sowohl als die Dividenden mit sich selbst multiplicirt, die neuen Quotienten ebenfalls gleich seyn müssen. **)

Auf ähnliche Art läßt es sich zeigen, daß auch

KI × KI in in ED × ED so oft, als LG × LG in AB × AB und also nicht nur

1 in I sond. auch 2 in II und 3 in III	so oft, als LG × LG in AB × AB

enthalten sey.

---

*) Z. L. §. 240. Nro. 1.

**) Z. L. §. 240. Nro. 7.

Werden nun bey mehrern gleichen Quotienten alle Divisoren, deßgleichen alle Dividenden addirt, und mit der Summe jener in die Summe dieser dividirt, so ist der dadurch entstehende Quotient jenen ersten Quotienten gleich *) und mithin

1 + 2 + 3, d. i. das Fünfeck LGHIK

in

I + II + III, d. i. im Fünfeck ABCDE

eben so oft, als

LG × LG in AB × AB

enthalten.

Dieser Beweis findet auch bey allen ähnlichen Parallelogrammen, Trapezen und regulären Vielecken statt, und somit gilt der Satz im vorigen und in diesem §. nicht nur von den Drey- und irregulären Vielecken, sondern von allen geradlinigten Flächenfiguren, welche ähnlich sind.

---

*) Z. L. §. 247.

Verwandlung der bisher vorgekommenen Flächenfiguren.

§. 87.

1) Man soll (Fig. 13) ein Quadrat zeichnen, das so groß sey, als die Quadrate A und B zusammengenommen.

Zeichne den rechten ∠ FDH, mache DE = der Seite von A, DG = der Seite von B, und ziehe die Hypotenuse EG; so wird das hierauf zu zeichnende Quadrat GELI, nach §. 59, das verlangte seyn.

Eben so würde man verfahren, wenn 3 oder mehrere Quadrate, z. B. A, B und L in Eines verwandelt werden sollten. Nachdem man nemlich EG, d. i. die Seite des Quadrats GELI, welches = A + B ist, erhalten hat, so errichtet man in E eine Perpendikulare, macht EK = der Seite von L, und zieht KG, welche, nach §. 59, die Seite des verlangten Quadrats GKNM seyn muß.

2) Man soll (Fig. 14) ein Quadrat zeichnen, das z. B. 5mal so groß als das Quadrat A sey.

Zeichne den rechten ∠ DBC, mache BF, deßgleichen BE = der Seite von A, und ziehe EF, so ist dieß die Seite des doppelten Quadrats. Wird nun in F die Per-

pendikulare FG, und auch diese = der Seite von A gemacht, so ist EG die Seite des 3fachen Quadrats. Auf gleiche Weise wird EH, die Seite des vierfachen, und EI, die Seite des 5fachen Quadrats erhalten (§. 59.)

3) Man soll (Fig. 15) ein Quadrat zeichnen, welches dem Unterschied zweyer gegebenen Quadrate A und B gleich sey.

Zeichne auch hier einen rechten ∠ ECF, mache CD = der Seite von A, und ziehe aus D mit der Seite von B den Bogen nm. Dieser durchschneidet den Schenkel CF in G, wo sodann CG die Seite des verlangten Quadrates ist (§. 59.)

4) Man soll ferner

a) eine unbenannte Zahl finden, welche anzeigt, wie oft (Fig. 16) das Quadrat A im Quadrat B enthalten sey.

Zeichne mehrere rechte Winkel 1, 2, 3 ꝛc., suche beym ersten derselben, nach Nro. 3, die Seite des Unterschieds zwischen A und B; sodann auf gleiche Weise beym zweyten Winkel die Seite des Unterschieds zwischen A und dem ersten Unterschied, oder dem Quadrat von CE, und fahre so fort, bis du endlich (in der Figur beym dritten Winkel) eine Seite des Unterschieds IL findest, welche der Seite von A gleich ist; so ist die um 1 vermehrte Zahl der vorgenommenen Operationen (hier die Zahl 4) die unbenannte Zahl, welche verlangt wurde (§. 59.).

Wäre

Wäre aber zwar FH noch größer als FG oder die Seite von A, hingegen IL schon kleiner als IK oder die Seite von A gewesen; so gäbe es keine ganze Zahl dieser Art, sondern sie wäre alsdann = 3 mehr einem Bruche, dessen Zähler der Inhalt des Quadrats von IL, und der Nenner der Inhalt des Quadrats A ist, wenn die Seiten dieser Quadrate mit einerley Längenmaaß gemessen werden.

b) Oder man soll endlich ein Quadrat zeichnen, so daß dasselbe ein bestimmter Theil eines andern gegebenen Quadrates sey.

Gesetzt, das zu zeichnende Quadrat sollte z. B = dem 7ten Theil eines andern werden, so wird, wenn man eine Seite des letztern in 7 gleiche Theile theilt, $\frac{1}{7}$ dieser Seite die Seite kleiner Quadrätchen seyn, deren 7 mal 7, oder 49 auf das große gehen, und von denen also 7 zusammen gerade den 7ten Theil des großen Quadrates ausmachen. Man darf daher nur aus der Seite jener kleinen Quadrätchen, nach Nro. 2, die Seite eines 7 mal größern Quadrates suchen, so ist geschehen, was man verlangte.

§. 88.

Ehe wir zur Verwandlung eines Rektangels, eines Rhombus oder Rhomboiden in ein Quadrat, was der Gegenstand dieses §. seyn soll, fortgehen können, ist es nöthig, sich zuvor mit den Begriffen von

Centri- und Peripheriewinkeln wohl bekannt zu machen, und sich von den letztern einen Satz zu merken, der zu jener Aufgabe unumgänglich erfodert wird.

1) Ein jeder ∠ ACB (Fig. 17), dessen Scheitel C im Centrum eines Cirkels liegt, heißt ein Centriwinkel. Er wird gemessen durch den Bogen AB, der zwischen seinen Schenkeln liegt, oder auf welchem er steht (§. 19.) Jeder andere Winkel heißt excentrisch, und unter ihnen heißen diejenigen, deren Scheitel in der Peripherie liegen, Peripheriewinkel. Dieß ist der Fall bey den Winkeln ADB, AEB und AFB, welche zwar sämmtlich, ebenso wie der Centriwinkel ACB, auf dem Bogen AB stehen, aber nicht, wie jener, diesen ganzen Bogen, sondern nur die Hälfte desselben zu ihrem Maaß haben.

2) Dieser Satz von den Peripheriewinkeln läßt sich leicht auf folgende Art beweisen:

a) Beym Winkel AFB, dessen Schenkel AF durchs Centrum geht.

Da das Dreyeck BCF gleichschenklicht ist, so ist der ∠ CBF = dem ∠ CFB oder AFB, also auch 2 × ∠ AFB = ∠ CFB + ∠ CBF. Nun ist ferner (§. 52. Nro. 2, g.) der ∠ ACB = ∠ CFB + ∠ CBF, mithin auch = 2 × ∠ AFB, und endlich die Hälfte des ∠ ACB, d. i. die Hälfte des Bogens AB = ∠ AFB.

b) Beym Winkel AEB, zwischen dessen Schenkeln der Centriwinkel ACB liegt.

Man ziehe durch E und C die Hülfslinie EG, so ist, nach lit. a;

$$\frac{\angle ACG}{2} = \angle AEG, \text{ und}$$

$$\frac{\angle BCG}{2} = \angle BEG, \text{ also auch}$$

$$\frac{\angle ACB}{2} = \angle AEB.$$

c) Beym Winkel ADB, dessen Schenkel DB den Schenkel AC des Centriwinkels durchschneidet.

Ziehe durch D und C die Hilfslinie DH; so ist abermals, nach lit. a,

$$\frac{\angle ACB}{2} + \frac{\angle BCH}{2} = \angle ADB + \angle BDH, \text{ und}$$

$$\frac{\angle BCH}{2} = \angle BDH, \text{ mithin auch}$$

$$\frac{\angle ACB}{2} = \angle ADB.$$

3) Wenn nun, wie in Nro. 2 bewiesen wurde, jeder Peripheriewinkel die Hälfte des Bogens, auf welchem er steht, zu seinem Maaß hat; so hat ein Peripheriewinkel, der auf dem Diameter steht, die Hälfte von

180°, d. i. 90° zu seinem Maaß, oder er ist ein rechter Winkel, und auf diesen Satz gründet sich folgende Regel zur Verwandlung eines jeden Rektangels in ein Quadrat.

Ziehe, wenn (Fig. 18.) ABCD das zu verwandelnde Rektangel ist, eine gerade Linie EK von unbestimmter Länge, trage darauf AB = CD von E nach G, und AC = BD von G nach H; halbire EH in F; ziehe aus F mit FE = FH einen Halbzirkel, und errichte aus G die Perpendikulare GI: so ist diese die Seite des verlangten Quadrats.

Es ist nemlich, weil das △ EIH rechtwinklicht, nach §. 63, Nro. 7, das △ EIG ähnlich dem △ GIH, folglich IG in EG so oft als HG in IG enthalten. Wird daher EG mit HG und IG mit sich selbst multiplicirt, so müssen beyde Produkte gleich seyn, indem ja bey iedem der eine Faktor um eben so vielmal kleiner ist, um so vielmal der andere Faktor größer ist, als beym andern Produkt. Nun ist aber EG × HG der Inhalt des Rektangels, und IG × IG der Inhalt des Quadrats, folglich das erstere wirklich ins letztere verwandelt.

Ganz auf dieselbe Art wird auch jedes schiefwinklichte Parallelogramm, ein Rhombus oder Rohmboide in ein Quadrat verwandelt, nur daß hier, wenn EG = der zur Grundlinie angenommenen Seite gemacht worden, HG = der wahren Höhe des Parallelograms gemacht werden muß.

§. 89.

1) Wird eine als Grundlinie angenommene Seite jedes beliebigen Dreiecks halbirt, an dem einen End- deßgleichen im Halbirpunkte ein Perpendikel = der jener Grundlinie zugehörigen Höhe des Dreyecks errichtet, und durch die Endpunkte dieser beyden Perpendikel eine gerade Linie gezogen; so entsteht ein rechtwinklichtes Parallelogramm, welches, nach §. 58. Nro. 6, dem Dreyeck gleich, und entweder selbst schon ein Quadrat ist, oder doch leicht, nach §. 88, darein verwandelt werden kann.

Auch könnte man die Perpendikel an den Endpunkten der ganzen Grundlinie errichten, und sie = der Hälfte der Dreyeckshöhe machen (§ 58. Nro. 6.)

2) Parallel- und gemeine Trapeze, deßgleichen die irregulären Vielecke werden durch Diagonalen in Dreyecke zerlegt; diese können, nach Nro. 1, in rechtwinklichte Parallelogramme, die Rektangel, nach §. 88, in Quadrate, und die zwey oder mehrere Quadrate, nach §. 87, in Eines verwandelt werden.

Es dürfte jedoch in den meisten Fällen vortheilhafter seyn, die vorgegebene Figur zuerst in Ein Dreyeck, dieses

sodann in ein Rektangel, und dieses in ein Quadrat umzubilden. Die Verwandlung in Ein Dreyeck aber geschieht auf folgende Art;

Wähle (Fig. 19) bey dem Fünfeck ACDEB eine schickliche Grundlinie AB, verlängere dieselbe auf beyden Seiten unbestimmt nach F und G, ziehe die Diagonalen AD und BD, und mit denselben durch E und C die Parallelen EH und CI, so ist, wenn ID und HD gezogen werden, das Dreyeck IHD dem Fünfeck gleich. Das letztere besteht nemlich aus den 3 Dreyecken ADB, BDE und ACD, und das Dreyeck IDB, welches jenem Fünfeck gleich seyn soll, aus den 3 Dreyecken ADB, BDH und ADI. Es braucht also blos gezeigt zu werden, daß das Dreyeck BDH dem Dreyeck BDE, und das Dreyeck ADI dem Dreyeck ACD gleich sey. Diese Dreyecke aber müssen gleich seyn, weil sie eine gemeinschaftliche Grundlinie und einerley Höhe haben, jene zur gemeinschaftlichen Grundlinie die Linie BD und zur Höhe die Weite der Parallelen BD und EH, diese zur gemeinschaftlichen Grundlinie die Linie AD und zur Höhe die Weite der Parallelen AD und IC (§. 58. Nro. 3).

Theilung der bisher abgehandelten Flächenfiguren.

§. 90.

1) Ein Parallelogramm in eine beliebige

Anzahl gleich großer Theile zu theilen, so, daß die Theilungslinien mit einer zur Grundlinie angenommenen Seite der Figur parallel laufen.

Theile, wenn (Fig. 20 und 21.) das Parallelogramm z. B. in 3 gleiche Theile getheilt werden soll, und AB die Grundlinie ist, die Seitenlinien BH und AG in 3 gleiche Theile, und ziehe die Theilpunkte zusammen, die hierdurch entstehenden 3 kleinern Parallelogramme, welche zusammen das große Parallelogramm ausmachen, müssen gleich seyn, denn sie haben gleiche Grundlinien und Höhen (§. 58. Nro. 1.)

a) Es laufen aber die Theilungslinien CD und EF parallel mit AB, weil sonst die Parallelen BD und AC, deßgleichen BF und AE, welche man doch gleich gemacht hat, nicht gleich seyn könnten (§. 52. Nro. 9.)

b) Nach eben diesem §. Nro. 9. sind aber auch die mit AB parallelen Theilungslinien CD und EF = AB, also die Grundlinien der 3 kleinern Parallelogramme gleich.

c) Endlich müssen auch die Höhen dieser Parallelogramme gleich seyn, denn es ist bey rechtwinklichten Parallelogrammen (Fig. 20.) BD = DF = FH, weil man sie gleich gemacht hat, und bey schiefwinklichten Parallelogrammen (Fig. 21.)

BI = DK = FL, weil, wie sich leicht zeigen läßt, die Dreyecke BID, DKF und FLH übereinkommende Dreyecke sind.

2) Ein Parallelogramm in eine beliebige Anzahl ungleicher Theile von bestimmter Größe zu theilen, so daß abermals die Theilungslinien mit einer zur Grundlinie angenommenen Seite der Figur parallel laufen.

Hier können die Theile entweder als Brüche, welche zusammen eine Einheit ausmachen, oder sie können ihrem Flächeninhalt nach angegeben seyn, in welchem letztern Falle die Inhalte aller Theile zusammen = dem Inhalt des ganzen Parallelograms seyn müssen.

a) Im erstern Fall theilt man die an der Grundlinie anliegenden Seitenlinien des Parallelogramms nach §. 63. Nro. 5, lit. a, und zieht die Theilpunkte zusammen. Der Beweis liegt in §. 84. Nro. 1.

b) Im 2ten Fall wird die Grundlinie des Parallelogramms gemessen, damit in den Inhalt jedes Theils dividirt, und dadurch in den Quotienten die Höhe jedes Theils in Längenmaaß erhalten. Ist das Parallelogramm rechtwinklicht, so können diese Höhen auf die Seitenlinien aufgetragen werden; bey schiefwinklichten Parallelogrammen aber

muß auf jede Grundlinie aus einem beliebigen Punkt derselben ein Perpendikel errichtet, dieser = der gefundenen Höhe des Theils gemacht, und durch das Ende desselben mit der Grundlinie eine Parallele gezogen werden.

3) Ein Parallelogramm so in zwey gleiche Theile zu theilen, daß die Theilungslinie durch ein bestimmtes, inner- oder ausserhalb der Figur liegendes Punkt gehe.

Ziehe (Fig. 22.), wenn ABDC das zu halbirende Parallelogramm, und E das Punkt ist, durch welches die Theilungslinie gehen soll, die Diagonalen AD und BC, welche sich in I durchschneiden; so kann durch E und I die Theilnngslinie EG gezogen werden.

Leicht läßt es sich hier vermittelst einiger Sätze von den übereinkommenden Dreyecken (§. 49.) zeigen, daß das Trapez AGHC = dem Trapez GBDH seyn muß; denn es ist das Dreyeck 1 = dem Dreyeck 2; das Dreyeck 3 = dem Dreyeck 4, und das Dreyeck 5 = dem Dreyeck 6.

Auf dem Felde ist es vortheilhafter, nur Eine Diagonale, z. B. BC zu ziehen, und diese in I zu halbiren.

§. 91.

1) Einen jeden Triangel in eine beliebige

Anzahl gleichgroßer Theile zu theilen, so, daß die Theilungslinien in einem bestimmten Winkelpunkt des Dreyecks zusammenlaufen.

Theilt die jenem Winkelpunkt gegenüberliegende Seite des Dreyecks in eben so viele gleiche Theile, als das Dreyeck erhalten soll, und zieht diese Theilpunkte mit jenem Winkelpunkt zusammen. Daß hierdurch die Theile des Dreyecks gleich werden müssen, erhellt aus §. 58. Nro. 3.

2) **Einen jeden Triangel in eine beliebige Anzahl ungleicher Theile von bestimmter Größe zu theilen, so, daß abermals die Theilungslinien in einem Winkelpunkt des Dreyecks zusammenlaufen.**

a) Sind die Theile als Brüche angegeben, so wird die dem Winkelpunkt gegenüberliegende Seite nach §. 63. Nro. 5, lit. a getheilt, und übrigens verfahren, wie in Nro 1. Der Beweis liegt in §. 85. Nro. 1.

b) Sind hingegen die Theile ihrem Flächeninhalt nach angegeben, so messe die Entfernung des Winkelpunkts, in welchen die Theilungslinien zusammenlaufen sollen, von der ihm gegenüberstehenden Seite. Diese Entfernung ist die gemeinschaftliche Höhe aller Theile, mit welcher in den Inhalt eines jeden Theils dividirt, und der

dadurch erscheinende Quotient mit 2 multiplicirt werden muß, um die Grundlinien zu erhalten. Diese Grundlinien, welche man auch durch Division mit der halben Höhe in den Inhalt eines jeden Theils erhalten kann, werden auf die dem bestimmten Winkelpunkte gegenüberliegende Seite aufgetragen, und die Theilungslinie gezogen. *)

§. 92.

1) Ein Trapez oder auch ein irreguläres geradlinichtes Vieleck in eine beliebige An=

---

*) Die Theilung eines Dreyecks so, daß die Theilungslinien mit einer Seite parallel laufen, beruht auf §. 85. Nro. 2, setzt aber das Quadratwurzel-Ausziehen voraus.

Es soll z. B. (Fig. 23.) das △ ABC in 3 gleiche Theile getheilt werden, so, daß die Theilungslinien mit AB parallel laufen. Messe AC oder BC, mache aus dem Maaß derselben die Quadratzahl, dividire darein mit der Anzahl der Theile, hier mit 3, und ziehe aus diesem Drittel die Quadratwurzel; so hast du CF oder CG. Ziehe ferner aus 2/3 jenes Quadrats die Wurzel, so bekommst du CD oder CE, und kannst sodann durch die Punkte F und D, oder durch die Punkte G und E mit AB parallel die Theilungslinien FG und DE ziehen.

Sollen die Theile ungleich seyn, und sind sie in Brüchen angegeben, so findet, wie leicht begreiflich, dasselbe Verfahren Statt. Es sollen z. B. die Theile von oben herab 1/7, 2/7 und 4/7 seyn, so wird zuerst aus 1/7

zahl gleichgroßer Theile zu theilen, so, daß die Theilungslinien mit einer zur Grundlinie angenommenen Seite der Figur ungefähr parallel laufen.

Rechne die zu theilende Figur aus, dividire in den Inhalt mit der Anzahl der Theile und halbire den Quotienten, so hast du die Hälfte Eines Theils.

Wird nun hierein entweder mit der ganzen Grundlinie dividirt, und der Quotient mit 2 multiplicirt, oder auch mit der halben Grundlinie dividirt; so wird die jener Grundlinie zugehörige Höhe eines Dreyecks erhalten, dessen Inhalt = der Hälfte Eines Theils ist.

---

und dann aus 1/7 + 2/7 d. i. aus 3/7 des Quadrats von AC oder BC die Wurzel gezogen.

Eben dieser Auflösung kann man sich endlich selbst dann bedienen, wenn die ungleichen Theile ihrem Inhalt nach angegeben sind, wäre z. B. das ganze Dreyeck 120°q groß, und sollte der erste Theil von oben herab 24°q, der zweyte 36°q, und der dritte 60°q. groß werden; so findet sich, daß, wenn man mit jedem Theil ins Ganze dividirt, der erste = 1/5 = 2/10, der zweyte = 3/10, und der dritte = 1/2 = 5/10 vom ganzen Dreyeck seyn soll.

Die Ausziehung der Quadratwurzel aus Theilen des Quadrats von AC oder BC läßt sich aber auch durch bloße Zeichnung verrichten, wozu die Gründe im §. 87, Nro. 4, lit. b zu finden sind.

Dieser Triangel wird nach §. 58 Nro. 4 auf die Grundlinie getragen, und auf dessen obere Seite, nach §. 58. Nro. 5, ein anderes, ihm gleiches Dreyeck gesetzt, dessen obere Seite mit der Grundlinie der ganzen Figur so ziemlich gleichlaufend seyn wird, und die 1te Theilungslinie ist.

Auf dieses zweyte Dreyeck setzt man nach §. 58. Nro. 5, ein drittes, ihm gleiches, und auf dieses das vierte so ergibt sich die 2te Theilungslinie ꝛc.

Sollte nun z. B. die ganze Figur in 5 gleiche Theile getheilt werden, und man hätte auf die beschriebene Art 4 Theilungslinien gezogen, also dadurch 4 Theile abgeschnitten; so muß der Rest der Figur, wenn in der Arbeit nicht gefehlt worden ist = dem 5ten Theil seyn, was sich durch Ausrechnung desselben leicht prüfen läßt.

Hierbey ist noch folgendes zu bemerken:

a) In Fig. 24, wo weder AB noch BC eine schickliche Grundlinie ist, ziehe man, wenn die Theilung dennoch von dieser Seite angefangen werden soll, die Linie AC, rechne das Dreyeck ABC aus, und subtrahire den Inhalt desselben vom gefundenen Inhalt Eines Theils. Den Rest trage man auf die oben gelehrte Art in Gestalt zweyer Dreyecke auf die nun zur Grundlinie angenommene Linie AC, so ergibt sich der 1te Theil. Die Theilungslinie, welche denselben

abschneidet, wird nun als neue Grundlinie angesehen, und darauf der 2te Theil getragen ꝛc.

b) In Fig. 25, wo der Winkel ABC ein einwärtsgehender Winkel ist, ziehe man ebenfalls AC, suche den Inhalt des Triangels ABC, und addire denselben zum Inhalt Eines Theils. Wird nun diese Summe in Gestalt zweyer Dreyecke auf die Linie AC getragen, so hat man den 1ten Theil, und nimmt sodann die Theilungslinie, welche ihn abschneidet, als neue Grundlinie an, um darauf den 2ten Theil zu tragen ꝛc.

c) In Fig 26, wo, wenn man AB zur Grundlinie annimmt, die rechte Seite der Figur bey C einen Winkel macht, ziehe man durch C mit AB die Parallele FC, rechne das dadurch entstehende Paralleltrapez aus, ziehe dessen Inhalt vom Inhalt Eines Theils ab, und trage den Rest auf FC aufwarts, so hat man den 1ten Theil. Sollte aber der Inhalt Eines Theils kleiner als der Inhalt des Trapezes seyn, so zieht man jenen von diesem ab, und trägt den Rest auf FC abwarts.

d) Soll (Fig. 27,) statt einer gezogenen Theilungslinie AB, eine andere gezogen werden, welche durch ein beliebiges Punkt C gehe; so ziehe die Linie BC, mit dieser durch A die Parallele AD, und endlich die Linie CD, welche die verlangte

Theilungslinie ist. Es besteht nemlich das durch AB abgeschnittene Stück aus dem Trapez EFDH und dem Dreyeck ADB, und das durch die neue Theilungslinie CD abgeschnittene Stück aus demselben Trapez und dem Dreyeck ADC. Dieses Dreyeck ADC ist aber = dem Dreyeck ADB, weil beyde Dreyecke die Linie AD zur Grundlinie und die Weite der Parallelen AD und CB zur Höhe haben.

2) Ein Trapez oder ein irreguläres geradlinichtes Vieleck in eine beliebige Anzahl ungleicher Theile von bestimmter Größe zu theilen, so, daß abermals die Theilungslinien mit einer als Grundlinie angenommenen Seite der Figur ungefähr parallel laufen.

a) Sind die Theile ihrem Flächeninhalt nach angegeben, so wird der 1te Theil auf die in Nro. 1 vorgetragene Art in Gestalt zweyer Dreyecke auf die Grundlinie gesetzt; sodann die erste Theilungslinie als neue Grundlinie betrachtet, und darauf der 2te Theil auf eben diese Art aufgetragen rc., bis sich der letzte Theil von selbst ergibt, und durch Ausrechnung desselben die Prüfung angestellt werden kann.

Sollte aber die Summe aller Theile größer oder kleiner als der Inhalt der ganzen Figur seyn, so müssen die

Theile vor allen Dingen berichtigt werden. Wie dieß geschehe, wollen wir an folgendem Beyspiel zeigen:

Ein Feld, das nach vorgenommener Messung 998°q. groß erfunden wurde, soll, laut Testaments, so getheilt werden, daß A 600°q., B 200°q. und C 300°q. erhalte. Diese 3 Theile machen zusammen 1100°q., von welchen der erste Theil $\frac{600}{1100} = \frac{6}{11}$, der zweyte $\frac{200}{1100} = \frac{2}{11}$, und der dritte $\frac{300}{1100} = \frac{3}{11}$ des Ganzen wäre. Da nun aber nicht 1100°q., sondern 998°q. der Inhalt der zu theilenden Figur ist, so erhält A nur $\frac{998 \times 6}{11}$, B nur $\frac{998 \times 2}{11}$, und C nur $\frac{998 \times 3}{11}$ Quadratruthen.

b) Sind die Theile als Brüche angegeben, welche zusammen eine Einheit ausmachen, z. B. $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ und $\frac{5}{12}$; so wird, wie im letzten Beyspiel, der Inhalt der ganzen Figur, welche getheilt werden soll, mit einem jeden dieser Brüche multiplicirt, und dadurch der Inhalt eines jeden Theils gefunden, worauf alsdann ganz, wie in lit. a verfahren werden kann.

Auch hier könnte der Fall vorkommen, daß die Brüche zusammen mehr oder weniger als 1 ausmachen, z. B. wenn es hieße: A soll $\frac{1}{4}$, B soll $\frac{1}{3}$ und C soll $\frac{7}{12}$ des Ganzen erhalten, wo die 3 Brüche nicht $\frac{12}{12}$, sondern $\frac{14}{12}$ zusam=

zusammen ausmachen. Demnach ist der dem A zugedachte Theil $\frac{1}{4}$ an $\frac{14}{12}$ oder $\frac{\frac{1}{4}}{\frac{14}{12}} = \frac{12}{4.14} = \frac{3}{14}$, der dem B zugedachte Theil $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{14}{12}} = \frac{4}{14}$, und der dem C zugedachte Theil $\frac{\frac{7}{12}}{\frac{14}{12}} = \frac{7}{14}$ des Ganzen, welches getheilt werden soll.

3) Ein Trapez oder ein irreguläres geradlinichtes Vieleck in eine beliebige Anzahl gleichgroßer oder auch ungleicher Theile von bestimmter Größe zu theilen, so, daß die Theilungslinien in einem innerhalb der Figur liegenden Punkte zusammenlaufen.

Hätte man z. B. (Fig. 28) das Fünfeck ABCDE in 3 gleiche Theile zu theilen, und wäre H das Punkt, in welchem sich die Theilungslinien vereinigen sollen; so ziehe man HG, HI und HK so, daß die Stücke 1, 2 und 3 dem Augenmaaß nach gleich seyen, und rechne jeden dieser Theile aus. Hat man nun zuvor das Drittel der zu theilenden Fläche durch Rechnung gefunden, so wird sichs sogleich zeigen, welche Theile, und um wie viel sie zu groß oder zu klein ausgefallen sind, und wie viel man also zu oder von einem jeden in Triangelsgestalt abschneiden müsse.

Daß diese Methode auch bey ungleichen Theilen von bestimmter Größe, ja daß sie auch in Nro. 2, wenn die Theilungslinien mit einer Seite der Figur ungefähr parallel laufen sollen, angewendet werden können, wird jeder, der das Bisherige verstanden hat, ohne weitere Erklärung einsehen.

Zweyter Abschnitt.

Von den Cirkeln und den regulären Vielecken.

§. 93.

Einige der wichtigsten Sätze von den bey den Cirkeln vorkommenden Linien und Winkeln sollen der Gegenstand dieses §. seyn, und obgleich einige von ihnen hie und da schon vorgekommen sind, so wollen wir dennoch auch sie, des Zusammenhangs wegen, hier nochmals kurz anführen.

1) In einem und demselben Cirkel, oder auch in 2 gleichen Cirkeln schneiden gleiche Chorden gleiche Bögen ab, und gleiche Bögen umspannen gleiche Chorden.

Dieser Satz kam schon im §. 24 vor; wir wolle ihn hier, nachdem wir seitdem mit der Lehre von den übereinkommenden Dreyecken uns bekannt gemacht haben, noch auf eine andere Art beweisen.

a) Ist (Fig. 29.) die Chorde DE = der Chorde FG, so sind die Dreyecke CDE und CFG übereinkommend (§. 49. Nro. 1.), folglich auch x = y, d. i. der Bogen DE = dem Bogen FG.

b) Nimmt man hingegen an, daß der Bogen DE = dem Bogen FG, folglich x = y sey; so sind abermals jene Dreyecke übereinkommend (§. 49. Nro. 2.) mithin auch die Chorde DE = der Chorde FG.

2) Eine durchs Centrum eines Cirkels gehende gerade Linie, die eine Chorde halbirt, theilt auch die beyde Bögen, welche jene Chorde umspannen, in zwey gleiche Theile, und steht auf der Chorde senkrecht.

Ist (Fig. 30.) EH = HF, und C das Centrum des Cirkels, so sind, wenn man die Hilfslinien EC und FC, deßgleichen EG und FG zieht,

a) die Dreyecke EHC und HCF übereinkommend (§. 49. Nro. 1.), folglich ist x = y, d. i. der Bogen EI = dem Bogen IF, und

b) u = r, d. h. GH senkrecht auf EF, und

c) das Dreyeck EHG ≌ dem Dreyeck HGF (§. 49. Nro. 2.), mithin die Chorde EG = der Chorde FG, also auch, nach Nro. 1, der Bogen EG = dem Bogen FG.

3) Eine durchs Centrum eines Cirkels gehende gerade Linie, welche einen Bogen halbirt, theilt auch die Chorde, die von jenem Bogen umspannt wird, und den andern, diese Chorde umspannenden Bogen in 2 gleiche Theile, und steht auf der Chorde senkrecht.

4) Eine durchs Centrum eines Cirkels gehende gerade Linie, welche auf einer Chorde senkrecht steht, halbirt diese Chorde, so wie auch die beyde Bögen, welche die Chorde umspannen.

5) Eine gerade Linie, welche die Chorde eines Cirkels halbirt, und zugleich perpendikular auf ihr steht, geht, wenn sie lang genug ist, durchs Centrum

Diese 3 Sätze, der 3te, 4te und 5te werden auf eine ähnliche Art, wie der zweyte bewiesen. Diese Beweise sind für jeden, welcher den des zweyten Satzes ganz verstanden hat, zu leicht, als daß man sie nicht dem Anfänger überlassen dürfte.

6) Alle Peripheriewinkel haben die Hälfte des Bogens, auf welchem sie stehen, zu ihrem Maaß.

Aus diesem Satz, der schon im §. 88. aufgestellt, und erwiesen wurde, ergeben sich die folgenden 6, von denen der 7te und 12te ebenfalls schon im §. 88. vorkamen.

7) Ein Peripheriewinkel, der auf dem Diameter steht, ist ein rechter Winkel (§. 88).

8) Ein excentrischer Winkel, dessen Scheitel innerhalb dem Cirkel liegt, hat den halben Bogen, auf dem er steht, mehr dem halben Bogen, auf welchem sein Scheitelwinkel steht, zu seinem Maaß.

Es ist (Fig. 31.) $r = m + x$ (§. 52. Nro. 2, g.)
m aber ist (Nro. 6.) = dem halben Bogen BC
und x = ... dem halben Bogen DE

folglich $r = \frac{\text{Bog. BC} + \text{Bog. DE}}{2}$

Nun ist BC der Bogen, auf welchem der Winkel r, und DE der Bogen, auf welchem sein Scheitelwinkel, der Winkel s steht, und mithin der behauptete Satz bewiesen.

9) Ein excentrischer Winkel, dessen Scheitel außer dem Cirkel liegt, hat den hal-

den Bogen, auf dem er steht, weniger der Hälfte des jenem entgegengesetzten, zwischen seinen Schenkeln liegenden Bogens zu seinem Maaß.

Es ist (Fig. 32.) $r = m - s$ (§. 52. Nro. 2, g.)
m aber ist (Nro. 6.) = dem halben Bogen AE
und s = ... dem halben Bogen BC

folglich $r = \frac{\text{Bog. AE} - \text{Bog. BC}}{2}$

10) Zwey Bögen zwischen zwey parallelen Chorden sind gleich.

Es ist (Fig. 33.) $r = s$ (§. 52. Nro. 1.)
r aber ist $= \frac{\text{Bog. BD}}{2}$
und s = . . . $\frac{\text{Bog. AC}}{2}$

folglich $\frac{\text{Bog. BD}}{2} = \frac{\text{Bog. AC}}{2}$

und Bog. BD. = Bog. AC.

Eben so leicht läßt sich der umgekehrte Satz erweisen.

11) Jede Chorde AB (Fig. 34.) theilt den Cirkel in zwey ungleiche Theile, von denen der eine größer, der andere kleiner als ein halber Cirkel ist, und welche Abschnitte oder Segmente genannt

werden. Derjenige Peripheriewinkel, welcher auf der Chorde steht, heißt der Winkel im Abschnitt; so ist x der Winkel im kleinern, und y der Winkel im größern Abschnitt. Zieht man aber an das eine Endpunkt der Chorde, z. B. an B, die Tangente FG, so ist der Winkel ABF Winkel des kleinern, und der Winkel ABG Winkel des größern Abschnitts.

Von diesen Winkeln nun kann folgender Satz erwiesen werden:

Der Winkel im kleinern Abschnitt ist = dem Winkel des größern Abschnitts, und der Winkel des kleinern Abschnitts ist = dem Winkel im größern Abschnitt, oder $\angle$ x = $\angle$ ABG, und $\angle$ ABF = $\angle$ y.

Es ist nemlich $\angle x = \frac{\text{Bog. ADB}}{2}$ (Nro. 6.)

und, wenn der Diameter BE gezogen wird,

der $\angle$ ABG = dem recht. $\angle$ EBG + $\angle$ ABE

also $= \frac{\text{Bog. EDB}}{2} + \frac{\text{Bog. AE}}{2}$ (Nro. 6.)

oder $= \frac{\text{Bog. ADB}}{2}$

Eben so ist

$\angle$ ABF = dem recht. $\angle$ EBF − $\angle$ ABE

also $= \frac{\text{Bog. ECB}}{2} - \frac{\text{Bog. AE}}{2}$ (Nro. 6.)

oder $= \frac{\text{Bog ACB}}{2}$;

und der $\angle$ y $= \frac{\text{Bog. ACB}}{2}$ (Nro. 6.)

12) Wenn in einem Cirkel (Fig. 30) ein Diameter GI eine Chorde EF perpendikular schneidet, so wird, nach Nro. 4, die Chorde dadurch in H halbirt, und es ist sodann IH (die Höhe des Segments) in HF (in der halben Chorde) eben so oft, als HF (die halbe Chorde) in HG (im Rest des Diameters) enthalten.

Der Beweis ergibt sich, wie schon im §. 88. gezeigt wurde, aus der Aehnlichkeit der beyden rechtwinklichten Dreyecke IHF und HFG.

13) Ein Radius, der in den Berührungspunkt einer Tangente gezogen wird, macht mit der Tangente einen rechten Winkel (§. 52. Nro. 7, 4te Art.)

14) Von zwey Secanten AE und AD (Fig. 90.), welche in einem Punkte A zusammenstoßen, ist das Stück AB der erstern, wel-

ches außer dem Cirkel liegt, in der andern AD eben so oft, als das Stück der andern AC, welches außer dem Cirkel liegt, in der erstern AE enthalten.

Man ziehe die Hilfslinien BD und CE, so entstehen die zwey Dreyecke ABD und ACE. Diese sind ähnlich, weil der Winkel v beyden gemeinschaftlich, und der Peripheriewinkel r = dem Peripheriewinkel m ist (Nro. 6.) Daher muß auch

AB in AD eben so oft, als AC in AE enthalten seyn (§. 62. Nro. 6)

§. 94.

Wir kommen nun zu einigen leichten Aufgaben, deren Auflösungen sich unmittelbar aus einigen Sätzen des vorigen §. folgern lassen.

1) Einen jeden Cirkelbogen zu halbiren.

a) Wenn das Centrum C (Fig. 35.) bekannt ist.

Beschreibe aus D und E mit gleicher Eröffnung des Cirkels Kreuzbögen in F, und ziehe CF.

Es ist hier der Bogen DG = dem Bogen EG, weil der Winkel DCE, nach §. 50. Nro. 3, halbirt worden ist.

b) Wenn das Centrum C unbekannt ist.

Beschreibe aus D und E mit gleicher Eröffnung des Cirkels auch in I Kreuzbögen, und ziehe FI.

Hier ist, nach §. 50. Nro. 4, DH = HE aber auch (weil das △ DIH ≌ dem △ EIH) u = r = 90°, folglich HI perpendikular auf DE, geht, nach §. 93. Nro. 5, verlängert durchs Centrum, und halbirt, nach §. 93. Nro. 4., den Bogen DE.

2) Das unbekannte Centrum eines Cirkels zu finden.

Ziehe (Fig. 36.) zwey Chorden AB und BE, welche ungefähr einen rechten Winkel mit einander machen, und halbire jede derselben, nach §. 50, Nro. 4; so werden sich die Linien GF und DH in einem Punkte C durchschneiden, welches das Centrum des Cirkels ist. Es geht nemlich jede jener Linien, nach §. 93. Nro. 5. durchs Centrum, und folglich kann dieses, da es in jeder Linie liegen muß, nur ein gemeinschaftliches Punkt beyder, d. i. das Durchschneidungspunkt derselben seyn.

Auf gleiche Art kann dann auch zu jedem Cirkelbogen das unbekannte Centrum gefunden werden.

3) Um ein jedes Dreyeck einen Cirkel zu zeichnen, so, daß alle 3 Winkelpunkte desselben in der Peripherie liegen.

Nehme (Fig. 37.) zwey Seiten des Dreyecks, z. B.

AD und BD als Chorden des zu zeichnenden Cirkels an, und suche zu ihnen, wie in der zweyten Aufgabe, das Centrum.

4) Am Ende B (Fig. 38) einer Linie AB eine Perpendikulare aufzurichten.

Setze den Zirkel in einem beliebigen Punkte C ein, und eröffne ihn bis B, ziehe mit diesem Radius den Bogen DBG, aber auch durch das Centrum C und durch das Punkt D einen Diameter, so ergibt sich das Punkt E, und es kann durch B und E die Perpendikulare BF gezogen werden, weil, nach §. 93. Nro. 7, der ∠ DBE ein rechter Winkel seyn muß.

5) Aus der in Zahlen gegebenen Höhe eines Abschnitts und seiner halben Chorde den Diameter des Cirkels durch Rechnung zu finden.

Dividire, wenn der Abschnitt kleiner als ein halber Cirkel ist, mit der Höhe des Abschnitts in die halbe Chorde, so zeigt der unbenannte Quotient an, um wie vielmal die letztere größer, als die erstere ist. Um eben so vielmal ist aber auch, nach §. 93. Nro. 12, der Rest des Diameters größer, als die halbe Chorde, daher man diese nur mit jenem Quotienten multipliciren darf, um den Rest des Diameters zu erhalten. Wird dann hierzu die Höhe des Abschnitts addirt, so hat man den ganzen Diameter.

Das nemliche Verfahren findet auch dann statt, wenn der Abschnitt größer, als ein halber Cirkel ist; nur wird hier jener Quotient ein eigentlicher Bruch. Auch könnte man, nach dem 1ten Curs der Z. L. Seite 149, die Chorde zuerst mit sich selbst multipliciren, und hernach in jenes Produkt mit der Höhe des Abschnitts dividiren, um im Quotienten den Rest des Diameters zu erhalten.

§. 95.

Was reguläre Vielecke sind, wurde im §. 55. gelehrt. Sie erhalten ihren Beynamen von der Zahl ihrer Seiten, z. B. ein reguläres Fünf-, Sieben-, Zehneck ꝛc.

Man kann sich um jedes einen Cirkel gezogen denken, so, daß alle Winkelpunkte in der Peripherie liegen, d. h. daß alle Seiten des Vielecks Chorden des Cirkels sind. Das Centrum C des Cirkels (Fig. 39.) ist dann auch das Centrum des Vielecks. Zieht man von diesem in alle Winkelpunkte gerade Linien CF, CE, CD ꝛc., so sind dieß Radien des um das Vieleck beschriebenen Cirkels, und theilen dasselbe in eben so viele übereinkommende Dreyecke, als das Vieleck Seiten hat. Diese Dreyecke sind aber übereinkommend, weil ihre Seiten gleich sind, und folglich sind auch alle um das Centrum C herumliegende Winkel FCE, ECD ꝛc. einander gleich. Einen solchen Winkel meint man, wenn man vom Centriwinkel eines regulären Vielecks spricht, nemlich einen Winkel, den zwey aus dem Centrum an zwey benachbarte Winkelpunkte gezogene gerade Linien miteinander bilden. Auch die

Bögen FE, ED ꝛc. sind gleich, weil sie das Maaß gleicher Winkel sind, oder auch, weil sie gleiche Chorden umspannen (§. 93. Nro. 1.) Die Winkel am Umfang AFE. FED ꝛc. heißen auch Vielecks = oder Polygonwinkel. Von ihnen, so wie von den Centriwinkeln regulärer Vielecke soll in diesem §. das Nöthige als Vorbereitung zur Bildung regulärer Vielecke gelehrt werden.

1) Die Summe aller Centriwinkel eines jeden regulären Vielecks ist $= 360°$, indem ja die gleichen Bögen, durch welche sie gemessen werden, zusammen die ganze Peripherie des um das Vieleck beschriebenen Cirkels ausmachen.

2) Es ist daher jeder einzelne Centriwinkel eines regulären Vielecks $= 360°$ dividirt durch die Anzahl der Seiten des Vielecks. So ist z. B. der Centriwinkel des Fünfecks $= \frac{360°}{5} = 72°$, des Sechsecks $= 60°$, des Siebenecks $= 51\frac{3}{7}°$, des Achtecks $= 45°$, des Neunecks $= 40°$, des Zehnecks $= 36°$ ꝛc.

3) Wie bey allen Vielecken überhaupt, so erhält man auch bey den regulären die Summe der Vieleckswinkel, wenn man 2 von der Summe der Seiten abzieht, und mit dem Rest 180° multiplicirt (§. 55.)

4) Und folglich wird das Maaß Eines Vieleckswinkels erhalten werden, wenn man jene Summe mit der Zahl der Seiten dividirt.

5) Aus Nro. 3 und 4 ergiebt sich folgende Tabelle:

Zahl der Seiten.	Summe der Vieleckswinkel.	Maaß Eines Vieleckswinkels.
3	180	60
4	360	90
5	540	108
6	720	120
7	900	$128\frac{4}{7}$
8	1080	135
9	1260	140
10	1440	144
11	1620	$147\frac{3}{11}$
12	1800	150
13	1980	$152\frac{4}{13}$
14	2160	$154\frac{4}{14}$
15	2340	156
	ꝛc.	ꝛc.

6) Es kann aber auch der Vieleckswinkel gefunden werden, ohne daß man zuvor die Summe sucht. Denn

da (Fig. 39.) die Dreyecke CEF und CAF gleichschenklicht und übereinkommend, folglich $r = m$ und $v = q$, so ist auch

$r + v = q + m$ und (da $q = r$) auch $r + v = r + m$

Nun ist $r + v =$ dem Vieleckswinkel,
und $r + m = 180° - s$,

also wird (da s der Centriwinkel) der Polygonwinkel jedes Vielecks gefunden, wenn man von 180° den Centriwinkel abzieht.

§. 96

Zur Bildung regulärer Vielecke muß, außer der Zahl der Seiten, gegeben seyn.

A) entweder ein Cirkel, in welches das Vieleck gezeichnet werden soll;

B) oder die Seite des Vielecks;

C) oder endlich ein Cirkel, um welches dasselbe gezeichnet werden soll.

A.

1) Mit Hülfe des Transporteurs ein reguläres Vieleck von einer bestimmten An-

Anzahl Seiten in einen gegebenen Cirkel zu zeichnen, z. B. ein Fünfeck.

Ziehe (Fig. 39.) einen Radius CF, berechne den Centriwinkel s (§. 95. Nro. 2.) trage ihn auf CF an C, und ziehe den andern Schenkel desselben CE aus, so schneidet dieser den Bogen FE ab, welcher die Seite des verlangten regulären Vielecks umspannt. Diese Seite FE wird in den Cirkel genommen, in der Peripherie von E nach D, von D nach B ꝛc. herumgetragen, und der etwa am Ende bey F sich ergebende Fehler durch eine kleine Eröffnung oder Schließung des Zirkels nach dem Augenmaaß gehoben.

2) Ohne Transporteur, blos mit Hülfe des Zirkels und Linials ein oder das andere reguläre Vieleck in einen Cirkel zu zeichnen.

a) ein Sechseck.

Trage (Fig. 40.) den Radius CG von G nach D, von D nach E ꝛc. in der Pheripherie herum, und ziehe die Chorden GD, DE ꝛc.

Hier ist das Dreyeck CGD ein gleichseitiges, folglich der Winkel s = 60°, also eben so groß, als, nach §. 95. Nro. 2. der Centriwinkel eines regulären Sechsecks seyn muß.

Durch Halbirung der Bögen GD, DE ꝛc. wird das

Zwölfeck, durch nochmalige Halbirung das 24eck ꝛc. und, zieht man die Chorden AE, EG und AG, ein gleichseitiges Dreyeck erhalten.

b) ein Achteck.

Ziehe (Fig. 41.) einen Diameter GI und auf diesen einen andern AE perpendikular, so ist AGEI ein Quadrat, indem

u = s = m = n, folglich IE = EG = GA = AI, und jeder Winkel am Umfange = 90°, weil jeder auf einem Diameter steht.

Werden nun die Bögen IDE, EFG ꝛc. halbirt, und die Chorden gezogen, so hat man das Acht- und durch nochmalige Halbirung das Sechzehneck ꝛc. *)

---

*) Die Gründe der geometrischen Verzeichnung des Fünf- und Zehnecks lassen sich hier nicht wohl vortragen. Die Regel dazu ist:

Errichte (Fig. 42.) aus dem Centrum C auf den Diameter GE die Perpendikulare CH, halbire den Radius CE in D, und trage DH von D nach F; so ist FH die Seite des Fünf-, und FC die Seite des Zehnecks für den vorgegebenen Cirkel.

Auch hier erhaltet man durch Halbirung der Bögen das 20, 40eck ꝛc. und, wenn man vom Bogen des Sechsecks den des Zehnecks abschneidet, den Bogen und folglich auch die Chorde des 15ecks, woraus sich wieder durch Halbirungen die Bögen und Chorden des 30, 60ecks ꝛc. finden lassen.

B. *)

Mit Hülfe des Transporteurs ein reguläres Vieleck von einer bestimmten Anzahl Seiten zu zeichnen, wenn die Seite desselben gegeben ist, z. B. ein Fünfeck.

1) Ziehe (Fig. 43.) die gegebene Seite AB, trage an das eine Endpunkt B derselben den zuvor, nach §. 96. Nro. 4, 5 oder 6, gefundenen Polygonwinkel, mache den Schenkel desselben BE = AB, halbire diese Seiten in G und H, und errichte aus diesen Punkten zwey Perpendikularen. Diese werden sich in C schneiden, und die Seite AB wird in einem aus C mit dem Radius CA beschriebenen Cirkel sich so oft herumtragen lassen, als das Vieleck Seiten bekommen soll.

Die Richtigkeit dieser Auflösung ist so einleuchtend, daß sie keiner weitern Erklärung bedarf.

2) Oder ziehe abermals die gegebene Seite AB, trage an jedes Endpunkt derselben den zuvor berechneten halben Polygonwinkel, und verlängere die Schenkel derselben, bis sie sich in C schneiden.

Da hierdurch der Winkel ACB = 180° weniger

*) Geometrische Bildungen würden hier zu weit führen.

dem Polygonwinkel wird, so ist er ja, nach §. 95. Nro. 6, Centriwinkel des verlangten Vielecks.

C.

Ein reguläres Vieleck von einer bestimmten Anzahl Seiten um einen gegebenen Cirkel zu zeichnen; z. B. ein Siebeneck.

Zeichne (Fig. 44.) zuerst nach Lit. A, ein reguläres Vieleck von eben so viel Seiten ABC'DEFG in den Cirkel, fälle aus dem Centrum C auf jede Seite die Perpendikel CO, CH CI rc., verlängere dieselbe bis an den Cirkel nach V, P, Q rc. ziehe die Radien CG, CA, CB. rc. verlängere sie unbestimmt, und ziehe endlich mit den Seiten des in den Cirkel beschriebenen Vielecks, mit GA, AB, BC rc. durch die Punkte V, P, Q rc. die Parallelen ga, ab, bc rc., so werden diese die Seiten des verlangten Vielecks seyn.

Hier muß gezeigt werden, daß das auf diese Art entstehende Vieleck a b c d e f g regulär, d. h. daß alle seine Winkel und Seiten gleich, aber auch daß es um den Cirkel beschrieben, d. h. daß alle seine Seiten Tangenten des Cirkels seyen.

Es sind aber

a) die Vieleckswinkel bey a, b, c rc. alle gleich, denn sie sind = den Vieleckswinkeln bey A,

B, C ꝛc. Dieß läßt sich auf folgende Art zeigen:

Nach §. 52. Nro. 1 ist

$$\angle OAC = \angle VaC$$

und $$\angle HAC = \angle PaC$$

also auch $$\underbrace{\angle OAC + \angle HAC}_{\parallel} = \underbrace{\angle VaC + \angle PaC}_{\parallel}$$

oder $$\angle \text{ bey } A = \angle \text{ bey } a$$

Das Nemliche läßt sich aber auch bey allen übrigen Vieleckswinkeln erweisen.

b) Auch sind die Seiten ga, ab, bc ꝛc. alle einander gleich, dann weil die Dreyecke CgV, CVa, CaP, CPb ꝛc. lauter übereinkommende Dreyecke sind, so sind auch die Linien gV, Va, aP, Pb ꝛc. alle einander gleich, woraus die Gleichheit von ga, ab, bc ꝛc. unmittelbar folgt. Jene Dreyecke sind aber nach §. 49. Nro. 6 übereinkommend, weil die Radien CV, CP ꝛc. die rechten Winkel bey O, H ꝛc., also auch die ihnen, nach §. 52 Nro. 1, gleiche Winkel bey V, P ꝛc., und, nach §. 93. Nro. 4, alle Winkel um C gleich sind.

c) Endlich müssen die Seiten ga, ab, bc ꝛc. nach §. 93. Nro. 13, lauter Tangenten des Cirkels seyn, weil sie in V, P, Q ꝛc. mit den Ra=

ben CV, CP, CQ rc. lauter **rechte** Winkel machen.

§. 97.

1) **Um jedes reguläre Vieleck auszurechnen** fälle man (Fig. 43.) vom Centrum C auf eine beliebige Seite AB das Perpendikel CG; messe dasselbe, aber auch AG oder die halbe Seite des Vielecks, und multiplicire das Maaß dieser beyden Linien in einander. Das Produkt ist der Inhalt des Dreyecks ABC, den man jetzt noch mit der Anzahl der Seiten multipliciren muß, um den Inhalt des ganzen Vielecks zu erhalten, indem dieses aus eben so vielen Dreyecken von gleicher Größe besteht, als es Seiten hat *).

2) Alle regulären Vielecke, welche gleich viele Seiten haben, sind ähnlich (§. 60.) z. B. die beyden Fünfecke Fig. 39 und 39. a, von welchen das letztere im erstern, nach §. 86, eben so oft, als z. B. das Quadrat von ab im Quadrat von AB, aber auch ebenso oft als das Quadrat von ac im Quadrat von AC enthalten ist. Denn nach §. 85. Nro. 2 ist

*) Vermittelst des Pyth. Lehrsatzes aus dem Inhalt des Vielecks, der Zahl seiner Seiten und der Größe einer Seite den Radius des Cirkels, deßgleichen aus dem Inhalt, der Seitenzahl und dem Radius die Größe einer Seite zu berechnen.

das $\triangle$ abc im ähnlichen $\triangle$ ABC eben so oft,
als ac $\times$ ac in AC $\times$ AC

enthalten, folglich werden auch die Fünffachen jener Dreyecke, d. i. die regulären Fünfecke eben so oft in einander enthalten seyn.

Zwey reguläre ähnliche Vielecke sind daher nicht nur eben so oft als die Quadrate ihrer Seiten, sondern auch eben so oft, als die Quadrate der Radien ihrer Cirkel, in welche sie beschrieben sind, in einander enthalten.

3) Da ferner (Fig. 39) die Dreyecke ABC, BCD rc. alle übereinkommend sind, so werden reguläre Vielecke in Quadrate verwandelt, wenn man nach §. 89, Eines jener Dreyecke darein verwandelt, und sodann aus diesem Quadrat nach §. 87 Nro. 2, das so vielfache Quadrat sucht, als das reguläre Vieleck Seiten hat.

§. 98.

Die Peripherie eines Cirkels läßt sich, als eine krumme Linie, nicht so, wie eine gerade, messen. Sie ließe sich aber leicht aus dem Diameter berechnen, wenn man wüßte, um wie vielmal sie bey einem jeden Cirkel größer als der Diameter desselben wäre; und dieß hat man auf folgende Art gefunden.

Man beschrieb (Fig. 44) ein reguläres Vieleck in

und ein ihm ähnliches um einen Cirkel, so war der Umfang des erstern kleiner, und der des letztern größer als die Cirkelperipherie. Je größer aber die Anzahl der Seiten jener Vielecke ist, desto geringer wird auch jener Unterschied, so, daß man bey einer sehr großen Anzahl Seiten annehmen konnte, die Cirkelperipherie sey um eben so viel größer als der Umfang des innern Vielecks, als sie kleiner als der Umfang des äußern Vielecks ist. Man nahm daher den in viele gleiche Theile getheilten Diameter als Maaßstab an, maaß damit die Umfänge beyder Vielecke aus, addirte dieselbe, dividirte in die Summe mit 2, und erhielt so mit ziemlicher Genauigkeit die Peripherie in Theilen des Diameters. Anfänglich suchte man dieß wirklich durch genaue Zeichnung zu bewerkstelligen, bediente sich aber in der Folge zu noch größerer Genauigkeit der Rechnung, indem man zuerst aus dem Radius die Seite eines in und um den Cirkel beschriebenen Quadrats, sodann aus dieser die Seite eines in und um den Cirkel beschriebenen 8, 16, 32ecks ꝛc. mit Hilfe des Pythagoräischen Lehrsatzes berechnete, und am Ende die gefundene Seite jedes Vielecks mit der Anzahl der Seiten multiplicirte ꝛc.

Auf solche Art fand man, daß, wenn der Diameter als Einheit angenommen wird, die Peripherie dem Decimalbruch 3,14159 .... gleiche, welchen Decimalbruch man bis auf 156 Decimalstellen berechnet hat. In den meisten Fällen aber ist es hinlänglich, die Peripherie zu 3,14 anzunehmen.

Demnach ist also jede Peripherie 3,14 mal größer, als ihr Diameter, und

1) man erhält sie, wenn man den Diameter mißt, und das Maaß desselben mit dem Bruch 3,14 multiplicirt.

Beyspiel.

Der Diameter sey = $3^{\circ}6'1''$ (10'l.)
so ist die Peripherie = $11^{\circ}3'3''5'''4^{IV}$ (10'l.)
denn (Z. L. §. 165.)

$$\begin{array}{r} 3^{\circ}6'1'' \text{ (10'l.)} \\ 3,14 \\ \hline 1444 \\ 361 \\ 1083 \\ \hline 1133,54'' \text{ (10'l.)} = 11^{\circ}3'3''5'''4^{IV} \text{ (10'l.)} \end{array}$$

2) Man wird daher auch umgekehrt aus der in Längenmaaß gegebenen Peripherie den Diameter finden, wenn man mit dem Bruch 3,14 in die Peripherie dividirt.

Beyspiel.

Die Peripherie sey = $8^{\circ}.2''$ (10'l.)
so ist der Diameter = $2^{\circ}5'5''4'''$ 2c. (10'l.)
denn (Z. L. §. 169.)

1. 2.

$\frac{802'',00}{3,14}$

80200 | 314
628 | 255,4'' $\overset{(10'l.)}{=}$ $2^{\circ}5'5''4'''$ ꝛc. (10'l.)

1740
1570

1700
1570

1300
1256

44 ꝛc.

Nimmt man den Diameter zu 7 an, d. h. denkt man sich denselben in 7 gleiche Theile getheilt, so gehen nicht ganz, aber doch beynahe 22 dergleichen Theile auf die Peripherie. Sie ist also, nach diesen Zahlen, $\frac{22}{7}$ mal größer als der Diameter. Verwandelt man diesen Bruch in einen Decimalbruch, so findet man ihn = 3,14285 ꝛc., also um $\frac{126}{100000}$ größer als den, welcher oben angegeben wurde. Da nun der Bruch 3,14159 die Peripherie um kein ganzes Hunderttausendstel des Diameters zu klein angibt, so erhält man dieselbe durch den Bruch $\frac{22}{7}$ um 126 Hunderttausendstel zu groß, und durch den abgekürzten Bruch 3,14 um 159 Hunderttausendstel des Diameters zu klein. Obgleich hier der Fehler im letztern Fall um etwas beträchtlicher als beym Bruch $\frac{22}{7}$ ist, so bedient man sich dennoch, wegen der größern Leichtigkeit im Rechnen, gemeiniglich des Decimalbruches 3,14.

Denkt man sich endlich den Diameter in 113 gleiche Theile getheilt, so gehen ebenfalls nicht ganz, aber doch beynahe 355 dergleichen Theile auf die Peripherie, und diese wäre also, nach jenen Zahlen, $\frac{355}{113}$ mal größer als der Diameter.

Nun ist $\frac{355}{113} = 3,1415929$ ꝛc., und der obige Decimalbruch, wenn man ihn fortsetzt, $= 3,1415926$ ꝛc.

Nach diesem letzten wird also die Peripherie um kein ganzes Zehnmillionstel zu klein, nach dem Bruch $\frac{355}{113}$ höchstens um 3 Zehnmillionstel zu groß gefunden. Dennoch bedient man sich dieses Bruches, wegen der weitläuftigern Rechnung, die er veranlaßt, nur dann, wenn ein hoher Grad von Genauigkeit nöthig ist.

Auf gleiche Art, wie wir oben aus dem Diameter die Peripherie, und aus der Peripherie den Diameter gefunden haben, läßt sich auch aus dem Radius die halbe Peripherie, und aus dieser der Radius berechnen.

§. 99.

1) Leicht ist es nun, den Inhalt eines jeden Cirkels zu finden.

Denkt man sich nemlich (Fig. 45.) die Peripherie eines Cirkels in sehr viele gleiche Theile getheilt, und in alle Theilpunkte a, b, d, e ꝛc. die Radien ac, bc, dc, ec ꝛc. gezogen, so kann man die Bögen ab, bd, de ꝛc. als gerade Linien ansehen, und die Cirkelfläche ist sodann

gleich der Summe der Dreyecke acb, bcd ꝛc., deren gemeinschaftliche Höhe der Radius des Cirkels ist, denn, wenn ab sehr klein angenommen wird, so wird die Höhe fc = der Seitenlinie ac seyn. Die Summe der Grundlinien aller dieser kleinen Dreyecke ab + bd + de ꝛc. ist aber = der Peripherie des Cirkels, und folglich gleicht die Cirkelfläche einem Dreyeck ABC (Fig. 46.), dessen Grundlinie AB = der Peripherie, und dessen Höhe AC = dem Radius des Cirkels ist.

Daher die Regel zur Berechnung der Cirkelfläche:

Multiplicire die Peripherie mit dem Radius, und dividire ins Produkt mit 2.

Oder:

Multiplicire die Peripherie mit dem Diameter, und dividire ins Produkt mit 4.

Berechnung des Diameters, wenn der Inhalt des Cirkels und die Peripherie, und der Peripherie, wenn, außer dem Inhalt, der Diameter gegeben ist.

2) Da ferner, nach Nro. 1, jeder Cirkel als ein reguläres Vieleck von sehr vielen Seiten betrachtet werden kann, so sind alle Cirkelflächen ähnlich (§. 60.) z. B. die beyden Cirkelflächen Fig. 45 und 45 a, von welchen daher auch, nach §. 97, die letztere in der erstern eben so oft, als das Quadrat des Radius

ac im Quadrat des Radius ac enthalten seyn wird. Folglich sind je zwey Cirkelflächen eben so oft als die Quadrate ihrer Radien, oder auch als die Quadrate ihrer Diameter in einander enthalten.

3) Und da endlich (Fig. 45 und 46.) jeder Cirkel, dessen Peripherie und Radius bekannt ist, leicht, nach Nro. 1, in ein rechtwinklichtes Dreyeck verwandelt werden kann; so ergibt sich hieraus zugleich, mit Zuziehung des §. 89, die Verwandlung der Cirkel in Quadrate.

§. 100.

Der Inhalt eines Cirkels ist im Quadrat seines Diameters eben so oft enthalten, als 785 in 1000.

Denn es sey der Diameter = 100, so ist die Peripherie = 314, und der Inhalt des Cirkels = $\frac{31400}{4}$ = 7850; das Quadrat des Diameters aber ist = 100 × 100 = 10000. Es ist also der Cirkel im Quadrat seines Diameters eben so oft enthalten, als 7850 in 10000 oder 785 in 1000.

Hieraus folgt,

1) daß der Cirkel = $\frac{785}{1000}$ vom Quadrat des Diameters, und

2) das Quadrat des Diameters = $\frac{1000}{785}$ vom Inhalt des Cirkels sey.

Will man daher den Inhalt eines Cirkels finden, ohne dessen Peripherie zu berechnen, so multiplicirt man den Diameter mit sich selbst, und das Produkt mit $\frac{785}{1000}$ *).

§. 101.

1) Ein Ausschnitt oder Sektor eines Cirkels ist ein Stück desselben, das von einem Bogen und von zwey, nicht in einerley Richtung liegenden Radien eingeschlossen ist. Es gibt daher (Fig. 47.) nicht nur Sektoren, die kleiner, sondern auch solche, die größer als ein halber Cirkel sind, je nachdem ihre Bögen weniger oder mehr als 180° haben, und je zwey Radien, welche einen Winkel mit einander machen, theilen die Cirkelfläche immer in einen solchen kleinern und größern Sektor.

Aus denselben Gründen, die im §. 99 vorgetragen worden sind, ist jeder Sektor gleich einem Dreyeck, dessen Grundlinie = dem Bogen, und dessen Höhe = dem Radius des Sektors ist.

*) Aus dem Inhalt des Cirkels wird der Diameter erhalten, wenn man den Cirkel mit $\frac{1000}{785}$ multiplicirt, und aus dem Produkt die Quadratwurzel zieht.

Daher die Regel zur Berechnung:

Multiplicire den in Längenmaaß ausgedruckten Bogen mit dem Radius, und dividire ins Produkt mit 2.

Um aber (Fig. 47.) z. B. den Bogen AB in Längenmaaß zu finden, muß man zuvor aus dem Radius, der ohnehin gemessen werden muß, nach §. 98, die halbe Peripherie in Längenmaaß suchen, sodann den Sektorswinkel ACB messen, d. i. den Bogen AB in Graden ausdrucken, mit dieser Anzahl Grade, z. B. 45, in 180 oder in die Anzahl von Graden, welche auf die halbe Peripherie gehen, dividiren, und endlich mit dem unbenannten Quotienten, 4, welcher anzeigt, der wievielste Theil der Bogen AB von der halben Peripherie ist, in die in Längenmaaß ausgedruckte halbe Peripherie dividiren. Der dadurch erscheinende Quotient ist die verlangte Länge des Bogens.

Ist aber der Bogen, wie z. B. der Bogen ADB, größer als ein halber Cirkel, so verlängere man BC nach E, messe den Winkel ACE, und suche daraus die Länge des Bogens AE, welche, zur halben Peripherie addirt, die Länge des ganzen Bogens ADB gibt.

2) Ein kleinerer Abschnitt EIF (Fig. 30.) ist = dem Sektor ECFI weniger dem Dreyeck ECF, oder dem Sehnentriangel, und folglich wird sein Inhalt gefunden, wenn man vom Inhalt

des Sektors den Inhalt des Sehnentriangels abzieht.

Der größere Abschnitt EGF aber ist = dem Sektor CEGF mehr dem Dreyeck ECF, und sein Inhalt wird daher gefunden werden, wenn man zum Inhalt des größern Sektors den Inhalt des Sehnentriangels addirt.

§. 102.

1) Eine Ellipse ist eine in Eine krumme Linie eingeschlossene Flächenfigur AEDB (Fig. 48.), welche sich vom Cirkel dadurch unterscheidet, daß ihre Durchmesser nicht gleich sind. Der größte Durchmesser AB heißt die größere, der kleinste, auf jenem perpendikular stehende Durchmesser ED die kleinere Axe.

2) Sind nun beyde Axen einer Ellipse gegeben, so geschieht die Zeichnung derselben folgendermaaßen:

Ziehe die größere Axe AB, und halbire sie in C; errichte daselbst eine Perpendikulare von unbestimmter Länge; halbire auch die kleinere Axe; trage die Hälfte derselben von C sowohl nach D als nach E; nehme die halbe größere Axe in Zirkel, und mache damit, von D oder E aus, auf AB die Durchschnittspunkte F und f, welche die Brennpunkte der Ellipse heißen. In diesen Punkten

ten schlage zwey Nadeln ein, und hänge an sie die Ende eines Fadens FGf, welcher mit samt den Schleifen gerade die Länge von AB haben muß. Wird nun dieser Faden durch ein zeichnendes Stift G angespannt, und mit diesem Stift so, daß der Faden immer angespannt bleibt, nach B, D, E, A bis wieder in G herumgefahren, so wird dadurch die verlangte Ellipse gezeichnet.

3) Einer solchen Ellipse Inhalt wird gefunden, wenn man die größere Axe als den Diameter eines Cirkels betrachtet, und daraus den Inhalt dieses Cirkels sucht, diesen gefundenen Inhalt mit der kleinern Axe multiplicirt, und ins Produkt mit der größern Axe dividirt; oder wenn man den Cirkel der kleineren Axe berechnet, denselben mit der größern Axe multiplicirt, und mit der kleinern in dieses Produkt dividirt. Die Gründe dieser Regeln können hier nicht angegeben werden.

4) Sollte (Fig. 49.) nur die größere Axe AD gegeben, die kleinere aber willkührlich seyn, so theile AD in 3 gleiche Theile; nehme diesen Drittheil in Zirkel; beschreibe damit aus den Theilpunkten B und C zwey Cirkellinien; ziehe durch B und F die Linie EF; nehme sie in Cirkel, und beschreibe endlich damit aus F und G die Bögen EH und IK; so machen mit diesen zwey Bögen die Bögen IAE und KDH die elliptische Linie aus, deren größere Axe die gegebene Linie AD ist.

Dritter Abschnitt.

Von den Körpern.

(Stereometrie.)

§. 103.

1) Eine gerade Linie AB (Fig. 50) *) steht auf einer ebenen Fläche CDFE perpendikular, wenn sie sich gegen die Fläche auf keiner Seite mehr neigt, als auf der andern, oder bestimmter, wenn sie mit allen geraden Linien, BH, BI ꝛc., welche von ihrem Aufstehepunkt B rings um dasselbe auf

*) Hier, so wie im ganzen gegenwärtigen Abschnitt, muß der Lehrer durch körperliche Vorstellungen zu ergänzen suchen, was in der Zeichnung theils nicht deutlich genug, theils gar nicht auszudrücken ist.

der Ebene gezogen werden können, lauter rechte Winkel macht.

2) Die Lage einer ebenen Fläche ABDC (Fig. 51) ist durch zwey Punkte in ihr, E und F nicht bestimmt; denn man ziehe durch jene Punkte die gerade Linie GH, so kann um diese Linie die Fläche wie man will, gedreht werden, und so in die verschiedensten Lagen kommen, ohne daß die Punkte E und F ihren Ort ändern.

3) Durch drey Punkte aber, E, F und I ist die Lage einer Ebene voll bestimmt; denn wollte man sie z. B. um die Linie GH drehen, so würde gleich das Punkt I nicht mehr in ihr liegen, und das nemliche würde bey den Punkten E oder F der Fall seyn, wenn man sie um eine durch F und I oder durch E und I gezogene gerade Linie drehen wollte.

4) Der Durchschnitt zweyer ebenen Flächen ABDC und FHGE (Fig. 52.) ist immer eine gerade Linie MN.

5) Die Entfernung eines Punktes A (Fig. 50.) von einer Ebene CDFE ist eine von jenem Punkte auf diese Ebene gefällte Perpendikulare AB.

6) Eine gerade Linie AC (Fig. 53.) liegt mit einer ebenen Fläche DFEB parallel, wenn sie überall gleichweit von der Fläche entfernt ist, oder be-

stimmter, wenn alle von beliebigen Punkten der Linie, z. B. von A, K, C, auf die Fläche gefällte Perpendikularen AG, KH, CI gleich lang sind.

7) Ein Flächenwinkel (Fig. 54.) ist die Neigung oder Eröffnung zweyer Ebenen AHIC und AFD, welche sich in der geraden Linie AC so berühren, daß sie sich verlängert durchschneiden würden. Errichtet man hier aus einem beliebigen Punkte der Linie AC, z. B. aus B, in jeder der beyden Flächen eine Perpendikulare auf AC, nemlich BG und BE, so ist das Maaß des Linienwinkels EBG zugleich das Maaß des Flächenwinkels DACI.

8) Eine ebene Fläche EFHG (Fig. 55.) liegt mit einer andern CDBA parallel, wenn sie überall gleichweit von ihr entfernt ist, oder bestimmter, wenn sie durch die Punkte M, N und O, d. i. durch die Endpunkte dreyer gleichlangen Perpendikularen gelegt ist, welche aus drey, nicht in einerley Richtung liegenden Punkten, I, K und L auf die Fläche CDBA errichtet sind.

9) Zu einem körperlichen Winkel (Fig. 56.) gehören wenigsten drey ebene Flächen, welche in einem Punkte C so zusammenstoßen, daß je zwey von ihnen eine Seite gemeinschaftlich haben. Die Linienwinkel aber, ACD, ACF und DCF, deren Schenkel Seiten jener Flächen sind, müssen zusammen immer weniger als 360° ausmachen. Wä-

re ihre Summe gerade = 360°, so würden die Flächen statt einen körperlichen Winkel zu bilden, in Eine Ebene zu liegen kommen.

§. 104.

Die Gränzen der Körper sind Flächen, (§. 2.) mithin sind alle Körper in Flächen eingeschlossen, welche man zusammen die Oberfläche des Körpers nennt. Diese Oberfläche kann entweder, wie z. B. bey einer Kugel, eine einzige erhabene Fläche seyn, oder sie kann aus mehrern Flächen bestehen, und zwar entweder aus lauter ebenen, in welchem Falle es wenigstens 4 seyn müssen, oder aus lauter unebenen, oder endlich auch aus ebenen und unebenen.

Hieraus ergibt sich die Eintheilung der Körper in ebene, unebene und vermischte.

Außerdem theilt man die Körper ein in irreguläre, halbreguläre und ganz reguläre. *)

I.

Irregulär heißt ein Körper, wenn die Flächen, die ihn einschließen, sie mögen nun alle eben, oder

---

*) Hier werden die Körper nach ihren Klassen, Familien, Gattungen und Arten nach und nach vorgezeigt.

alle uneben, oder theils eben, theils uneben seyn, ohne alle Ordnung mit einander verbunden sind.

II.

Unter den halbregulären, wohin alle gehören, bey welchen man rücksichtlich der einschließenden Flächen nur einige Ordnung wahrnehmen kann, sind vorzüglich zu merken:

1) die gleichdicken, oder prismatischen Körper. Es sind solche, bey denen zwey einander gegenüberstehende Flächen, von welchen wir die eine die Grund-, die andere die oberste Fläche nennen wollen, mit einander parallel laufen, und zugleich übereinkommend, die übrigen einschließenden Flächen aber, die man die Seitenflächen nennt, von der Beschaffenheit sind, daß alle mit der Grund- oder obersten Fläche parallele Durchschnittsflächen jener gleich und ähnlich ausfallen müssen.

Solche gleichdicke Körper sind

a) senkrecht, wenn die Seitenflächen mit der Grund- und obersten Fläche lauter rechte Winkel machen, und

b) schief, wenn dieß nicht der Fall ist.

Beyde, die senkrechten sowohl, als die schiefen, heißen

a) ordentliche, wenn die Grund- und oberste Fläche gleichseitige Dreyecke, Quadrate, regulär, Vielecke, Cirkel oder Ellipsen sind. Hieher gehört unter andern der Kubus, der senkrechte dessen Grundfläche ein Quadrat, und dessen Höhe, d. i. eine von irgend einem Punkte der obersten Fläche auf die Grundfläche gefällte Perpendikulare, = der Seite der Grundfläche ist, woraus erhellt, daß jeder Kubus von 6 gleichen Quadraten eingeschlossen sey. Ferner gehört hieher die Walze oder der Cylinder, und zwar die gewöhnliche senkrechte Walze, welche zur Grund- und obersten Fläche einen Cirkel hat; die senkrechte elliptische, bey welchen jene Flächen Ellipsen, und endlich die schiefe, bey welcher sie Ellipsen, aber auch Cirkel seyn können. Die übrigen erhalten ihren Namen von der Zahl der Seiten ihrer Grundflächen, z. B. ein ordentliches dreyseitiges, sechsseitiges ꝛc. senkrechtes oder schiefes Prisma ꝛc.

b) unordentliche, wenn die Grund- und oberste Fläche gleichschenklichte oder ungleichseitige Dreyecke, Rektangel, Rhomben, Rhomboiden, Trapeze, irreguläre Vielecke oder Stücke vom Cirkel sind. Diese könnte man wieder in halb- und ganz unordentliche eintheilen. Die cylindrischen Ab- und Ausschnitte gehören hieher; die übrigen werden auch hier nach der Zahl der Seiten ihrer Grundflächen benannt, z. B.

ein unordentliches dreyseitiges, vierseitiges rc. senkrechtes oder schiefes Prisma. Das Parallelepipedum gehört, wenn die Grund- und oberste Fläche Quadrate sind, unter lit. a; sind sie aber sonstige Parallelogramme, hieher.

2) Die **zugespitzten** Körper. Es sind solche, bey denen die an der Grundfläche anschließenden (dreyeckigten) Seitenflächen sich alle in einem der Grundfläche gegenüberliegenden Punkte vereinigen, und bey denen alle mit der Grundfläche parallele Durchschnittsflächen jener zwar ähnlich, *) aber desto kleiner sind, je entfernter von der Grundfläche der Durchschnitt geschieht. Sie heißen Pyramiden, wenn die Grundflächen eckigt, Kegel hingegen, wenn dieselbe rund sind. Solche zugespitzte Körper sind.

a) senkrecht, wenn alle ihre Kanten, d. i. alle gerade Linien von der Spitze in alle Winkelpunkte der Grundfläche gleich lang sind, und

b) schief, wenn dieß nicht der Fall ist. **) Auch

---

*) Dieß läßt sich aus §. 61. Nro. 2 und §. 62. Nro. 1. für die dreyeckigte Pyramide, und, da jede vieleckigte in mehrere dreyeckigte zerlegt, und der Kegel als eine vieleckigte Pyramide betrachtet werden kann, auch von diesen mit Leichtigkeit erweisen.

**) Diese Definition von senkrechten u. schiefen zugespitzten Körpern ist, rücksichtlich der Pyramiden, von mir willkührlich ange-

hier heißen beyde, die senkrechten sowohl als die schiefen

a) ordentliche, wenn die Grundfläche ein gleichseitiges Dreyeck, ein Quadrat, ein reguläres Vieleck, ein Cirkel oder eine Ellipse ist. Es gehört hieher der gewöhnliche senkrechte Kegel, dessen Grundfläche ein Cirkel, der senkrechte elliptische, dessen Grundfläche eine Ellipse ist, und der schiefe Kegel, dessen Grundfläche eine Ellipse aber auch ein Cirkel seyn kann. Die Pyramiden erhalten ihren Namen von der Zahl der Seiten ihrer Grundflächen, z. B. eine ordentliche fünf = zehn rc. eckigte senkrechte oder schiefe Pyramide;

b) unordentliche, wenn die Grundfläche ein gleichschenklichtes oder ungleichseitiges Dreyeck, ein Rektangel, Rhombus, Rhomboide, ein Trapez oder ein irreguläres Vieleck ist. Die Eintheilung in halb und ganz unordentliche fände auch hier Statt. Die Benennung ist übri-

---

nommen. Andere Schriftsteller unterscheiden zwischen gleichseitigen und ungleichseitigen Pyramiden, und nennen nur die nach obiger Definition senkrechte ordentliche Pyramide eine senkrechte, so, daß zwar jede senkrechte Pyramide gleichseitig ist, die schiefe aber gleichseitig, oder ungleichseitig seyn kann.

gens wie bey den ordentlichen, z. B. eine unordentliche vierseitige senkrechte oder schiefe Pyramide.

3) Die abgekürzten Körper. Sie entstehen, wenn bey irgend einem zugespitzten mit der Grundfläche ein paralleler Durchschnitt gemacht, und der dadurch abgeschnittene zugespitzte Theil weggenommen wird. Demnach gibt es eben so viele Gattungen und Arten abgekürzter Körper als es zugespitzte gibt.

III.

Die ganz regulären sind in lauter reguläre und zugleich übereinkommende Flächen eingeschlossen. Es gibt ihrer nur 6, nemlich

1) Das Tetraedron, das man auch als eine senkrechte ordentliche Pyramide betrachten kann, und welches von 4 übereinkommenden gleichseitigen Dreyecken,

2) Das Oktaedron, welches von 8 dergleichen Dreyecken,

3) Das Ikosaedron, welches von 20 solchen Dreyecken,

4) Das Hexaedron, oder der Kubus, der oben schon vorkam, weil man ihn auch als einen senk-

rechten gleichdicken Körper ansehen kann, und der von 6 übereinkommenden Quadraten,

5) Das Dodekaedron, welches von 12 regulären, übereinkommenden Fünfecken, und

6) Die Kugel, welche von Einer erhabenen Fläche eingeschlossen ist, deren Theile alle gleichweit von einem Punkt in der Kugel, nemlich ihrem Mittelpunkt oder Centrum entfernt sind. Stücke der Kugel sind der Kugelabschnitt und der Kugelausschnitt.

Daß es aber, außer der Kugel, nicht mehr ganz reguläre Körper geben könne, als jene angeführten 5, läßt sich aus §. 103, Nro. 9 leicht erweisen.

Beym Tetraedron sind nemlich die gleichen körperlichen Winkel aus drey Linienwinkeln zusammengesetzt, deren jeder = 60°, deren Summe also = 180°;

Beym Oktaedron sind es vier dergleichen Winkel, deren Summe = 240°;

Beym Ikosaedron sind es fünf, deren Summe = 300° ist.

Wollte man sechs dergleichen Winkel zu einem körperlichen Winkel verbinden, so würde ihre Summe = 360° seyn, d. i. sie würden in Eine Ebene zu liegen kommen. Es kann also nur jene 3 ganz regulären Körper

geben, deren einschließende Flächen gleichseitige Dreyecke sind.

Ferner besteht

beym Hexaedron der körperliche Winkel aus drey Linienwinkeln, deren jeder = 90°, deren Summe also = 270° ist. Vier dergleichen Winkel würden zusammen schon = 360° seyn, und es gibt daher nur Einen ganz regulären Körper, der von lauter Quadraten eingeschlossen ist.

Der Polygonwinkel des regulären Fünfecks ist = 108°. Beym Dodekaedron sind drey solcher Winkel zu einem körperlichen Winkel mit einander verbunden, und ihre Summe ist = 324°. Wollte man vier mit einander verbinden, so wäre ihre Summe = 432°, also schon mehr als 360°, und man würde sie daher gar nicht in ein Punkt zusammenstoßen können. Also gibt es nur einen ganz regulären Körper, der von lauter regulären Fünfecken eingeschlossen ist.

Endlich ist der Polygonwinkel des regulären Sechsecks = 120°. Es machten aber schon drey solcher Winkel zusammen 360° aus, und folglich können keine regulären Sechsecke, und noch viel weniger Sieben = Achtecke rc. einen körperlichen Winkel bilden, d. i. es kann keinen ganz regulären Körper geben, dessen einschließende Flächen mehr als fünf Seiten hätten.

Etwas von der Art, wie man sich die Entstehung

mehrerer der genannten Körper, z. B. der Prismata, der Kugel ꝛc. vorstellen kann.

§. 105.

Das Verfertigen der vorgezeigten Körper aus Chartendeckel, als der hierzu dienlichsten und wohlfeilsten Materie, ist von sehr manchfaltigem Nutzen, eine treffliche Vorübung zu vielen Arbeiten mehrerer Professionen, die Grundlage der ganzen Modellirkunst, eine nützliche und zugleich angenehme Repetition der Lehre von der Bildung der Flächenfiguren, und ein großes Erleichterungsmittel für die übrigen Lehren der Stereometrie. Zudem dürfte die dadurch entstehende Geschicklichkeit im Gebrauch der Hände zu manchfaltigen Zwecken ein Nutzen seyn, den durch die darauf zu verwendende Zeit keiner, und am wenigsten der künftige Professionist, zu theuer erkaufen wird.

Zu dieser Verfertigung der Körper wird zweyerley erfodert. Man muß nemlich das Netz des zu verfertigenden Körpers zeichnen können, aber auch mit mancherley Handgriffen beym Ausschneiden und Zusammenleimen bekannt seyn. Die letztern werden besser vorgezeigt als beschrieben, daher hier nur eine kurze Anweisung zum Zeichnen der Netze, und zwar nur der regulären und einiger senkrechten halbregulären Körper folgen wird, indem die Regeln zur Zeichnung der Netze schiefer Körper aus den bisher gelegten Gründen nicht gefolgert werden können.

Man versteht aber unter Netz eines Körpers eine auf eine Ebene entworfene Zeichnung aller Flächen, welche

den zu verfertigenden Körper einschließen sollen, und die so aneinander gränzen, daß, wenn alles Ueberflüssige weggeschnitten ist, man die Zeichnung nur nach den Gränzlinien der Flächen, durch welche diese zusammenhängen, biegen darf, um den verlangten Körper zu erhalten. Wir wollen bey den

A) regulären Körpern

anfangen.

1) Das Netz eines Tetraedrons aus der gegebenen Seite desselben.

Zeichne (Fig. 57.) ein gleichseitiges Dreyeck ABF, dessen Seite doppelt so groß, als die gegebene des Tetraedrons sey; halbire AB, BF, und FA in D, C und E, und ziehe DC, CE und ED.

Hier muß bewiesen werden, daß die durch das angegebene Verfahren entstehenden vier Dreyecke übereinkommend und gleichseitig sind.

Es ist aber

a) Das $\triangle$ ADE $\cong$ $\triangle$ FCE $\cong$ $\triangle$ BDC, denn es sind.

die $\angle\angle$ bey $\left\{\begin{matrix} A \\ F \\ B \end{matrix}\right\} = 60°$,

$$\text{und d. Seiten} \left\{\begin{matrix} AD \\ AE \\ FC \\ FE \\ BD \\ BC \end{matrix}\right\} = \frac{AB}{2} = \frac{BF}{2} = \frac{FA}{2}$$

b) also auch, da jene drey Dreyecke gleichschenklicht sind,

$$\text{die } \angle\angle \left\{\begin{matrix} ADE \\ AED \\ FCE \\ FEC \\ BDC \\ BCD \end{matrix}\right\} = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ;$$

Folglich jene Dreyecke nicht nur übereinkommend, sondern auch gleichseitig;

c) und da endlich (nach lit. a und b)

$$DE = CE = CD = \left\{\begin{matrix} AD \\ AE \\ FC \\ FE \\ BD \\ BC; \end{matrix}\right.$$

so ist auch das vierte Dreyeck CDE ein gleichseitiges und mit den Dreyecken ADE, FCE und BDC übereinkommendes Dreyeck.

2) Das Netz eines Oktaedrons aus der gegebenen Seite desselben.

Zeichne (Fig. 58.) nach Nro. 1, das Netz eines Tetraedrons AKE; verlängere CB, und mache BF = AK, verlängere AK, und mache KI = BK; ziehe IF; verlängere EK nach H, und trage endlich BK von B nach G; so können auch GK und GH gezogen werden.

Hier ist

$$\frac{m + s = 120^\circ, \text{ also}}{r = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ}$$

$$\frac{\left.\begin{matrix} BF \\ BI \end{matrix}\right\} = AK, \text{ also}}{\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ}$$

$$\text{und } IF = \left\{\begin{matrix} BF \\ BI \end{matrix}\right. = AK$$

$$\frac{BG = BK, \text{ also}}{d = z = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ}$$

$$\text{und } GK = \left\{\begin{matrix} BG \\ BK \end{matrix}\right.$$

$$\frac{a + d = 120^\circ, \text{ also}}{i = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ}$$

$$\underline{d + i = 120^\circ,\ \text{alſo}}$$

$$n = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

$$\underline{n + x = 120^\circ,\ \text{alſo}}$$

$$o = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

$$\text{und}\ \left.\begin{matrix} HI \\ HK \end{matrix}\right\} = KI = BK$$

$$\begin{array}{rl} FG = & BF - BG \\ & \ \ \| \qquad \| \\ \hline = & \underbrace{AK - BK} \\ & \qquad \| \\ \hline = & \quad AB \\ & \qquad \| \\ \hline = & \quad BK \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} FH = & FI - HI \\ & \ \ \| \qquad \| \\ \hline = & \underbrace{AK - BK} \\ & \qquad \| \\ \hline = & \quad AB \\ & \qquad \| \\ \hline = & \quad BK,\ \text{alſo} \\ \hline \end{array}$$

$$FG = FH$$

$$\underline{\left.\begin{matrix} b \\ q \end{matrix}\right\} = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ,\ \text{alſo}}$$

$$GH = \left\{\begin{matrix} FG \\ FH \end{matrix}\right\} = BK$$

$$\text{endlich} \left.\begin{matrix} u \\ v \end{matrix}\right\} = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ,$$

folglich sind alle Winkel der auf die vorgeschriebene Art gezeichneten vier untern Dreyecke = 60°, und alle Seiten dieser Dreyecke = BK, d. h. diese Dreyecke sind nicht nur gleichseitig, sondern auch unter sich und mit den vier obern Dreyecken übereinkommend.

3) Das Netz eines Ikosaedrons aus der gegebenen Seite desselben.

Zeichne (Fig. 59.) das gleichseitige △ ABH, dessen Seite = der gegebenen des Ikosaedrons; verlängere BH, und mache HI, IK ꝛc. = BH; ziehe durch A mit BM die Parallele AN, und mache AR, RO ꝛc. ebenfalls = BH; ziehe durch H und R, durch I und Q ꝛc. deßgleichen durch R und I, durch Q und K ꝛc. gerade Linien; verlängere BA gegen S und AH gegen D; mache endlich CH und OW = BH, und ziehe BC und NW; so werden alle hierdurch entstehenden 19 Dreyecke gleichseitig und mit dem ersten Dreyeck ABH, folglich auch unter sich selbst übereinkommend ausfallen müssen, denn es ist

$$\begin{aligned} m &= s = 60^\circ \\ AH &= AH \\ AR &= BH, \text{ also} \end{aligned}$$

$$\triangle ARH \cong \triangle ABH,$$

$$\left.\begin{matrix} y \\ n \end{matrix}\right\} = 60^\circ = s;$$

und HR = AH.

$$Z = y = 60^\circ = s$$
$$HR = AH$$
$$HI = BH, \text{ also}$$

$$\triangle\ HRI \cong \triangle\ ABH,$$

$$\left.\begin{matrix} a \\ v \end{matrix}\right\} = 60^\circ = s;$$

und IR = AH.

$$o = v = 60^\circ = s$$
$$IR = AH$$
$$IK = BH \text{ also}$$

$$\triangle\ IRQ \cong \triangle\ ABH$$

ꝛc. ꝛc.

Ferner

$$r = n = 60^\circ$$
$$n = a = 60^\circ$$
und $a = e = 60^\circ$, also

CT parallel mit BS,
SE parallel mit AD
und DU parallel mit CT, folglich

$$q = y = 60^\circ = s,$$
$$x = m = 60^\circ = r,$$
und da AR = AH,

---

das $\triangle$ ARS $\cong$ $\triangle$ ABH;

deßgleichen $t = v = 60° = r$,

$d = z = 60° = s$,

und da $HI = BH = AH$,

---

das $\triangle DHI \cong \triangle ABH$

ꝛc. ꝛc.

Endlich

$b = y = 60° = s$

$BH = BH$

$CH = BH = AH$, also

---

das $\triangle BCH \cong \triangle ABH$,

und eben so wird der Beweis für das Dreyeck OWN geführt.

4) Das Netz eines Hexaedrons oder Kubus aus der gegebenen Seite desselben.

Zeichne (Fig. 60.) ein Quadrat ABDC, dessen Seite = der gegebenen des Hexaedrons; verlängere alle Seiten desselben; mache DF, DI, BK, BM und MO, deßgleichen CE, CG, AH, AL und LN = der Seite des Quadrats, und ziehe endlich EF, LM, NO, IK und GH; so ist das verlangte Netz fertig, indem, wie sich leicht zeigen läßt, die Figuren 2, 3, 4, 5 und 6 ebenfalls Quadrate, und zwar mit dem Quadrat 1 übereinkommend seyn müssen.

5) Das Netz eines Dodekaedrons aus der gegebenen Seite desselben.

Zeichne (Fig. 61.) auf die gegebene Linie BE ein reguläres Fünfeck BEDCA, ziehe die Diagonalen CE und CB, und verlängere sie unbestimmt nach K und I; mache EF und BH = BE; beschreibe aus F und H mit BE in G Kreuzbögen; ziehe FG und HG, und auf gleiche Weise verfahre bey den übrigen vier Seiten des erstgezeichneten regulären Fünfecks; so ist das halbe Netz des Dodekaedrons fertig. Es kann nemlich leicht bewiesen werden, daß jedes der Fünfecke 2, 3, 4, 5 und 6 mit dem Fünfeck, 1 übereinkommen müsse. Wir wollen dieß bey dem Fünfeck 2 zeigen.

Es ist

$$z = v + r$$

$$= \frac{\text{Bog. BE.}}{2} + \frac{\text{Bog. CAB}}{2}$$

$$= \frac{\text{Bog. CABE}}{2}$$

$= x =$ dem Vieleckswinkel von 1.

Ferner

$$m = v + s$$

$$= \frac{\text{Bog.BE}}{2} + \frac{\text{Bog.CDE}}{2}$$

$$= \frac{\text{Bog CDEB}}{2}$$

$$= y =$$ dem Vieleckswinkel von 1.

Daher ist, weil BE = AB, EF = BE, BH = AC, und, wie so eben erwiesen wurde, auch die an AB und BE anliegende Winkel gleich sind,

BEFH $\cong$ ABEC, also auch
HF = CE;

und da endlich FG = CD und HG = ED gemacht wurde, folglich

das $\triangle$ HFG $\cong$ $\triangle$ CDE ist,

so ist auch das ganze Fünfeck 2 $\cong$ dem Fünfeck 1.

6) Das Netz zu einer Kugel aus dem gegebenen Diameter derselben.

Berechne aus dem Diameter die Peripherie, trage dieselbe nach dem nemlichen Maaßstab, auf welchem der Dia-

meter gemessen wurde, als eine gerade Linie aufs Papier, und theile sie in 12 gleiche Theile; einen solchen 12ten Theil AB (Fig. 62.) halbire in C; errichte aus diesem Punkt eine Perpendikulare DE von unbestimmter Länge; trage von C nach F und G etwas weniger als den vierten Theil der Peripherie; verlängere AB unbestimmt auf beyden Seiten; suche aus CF = CG (aus der halben Sehne) und aus BC = AC (der Höhe des Segments) den Rest des Diameters (§. 94. Nro. 5.) trage die Hälfte desselben d. i. den Radius, von B nach H und von A nach I, und beschreibe endlich mit HC = IC aus H und I die Bögen FBG und FAG. Zwölf solcher Doppeltsegmente, wie FAGB, machen zusammen die Kugelfläche aus. Um sie aber zusammenzusetzen, hat man eine gut abgedrehte hölzerne Kugel von einem um die doppelte Chartendeckeldicke kleinern Diameter nöthig. Ueber diese wird eines der zuvor etwas angefeuchteten Segmente gelegt, und von C nach F und G durch Ziehen und Falzen so lange gedehnt, bis es vollkommen an der Oberfläche der hölzernen Kugel anschließt, welches dann erfolgt, wenn durch jenes Ziehen und Falzen CF so lange als AF oder BF, und CG so lange als AG oder BG geworden ist. Hierauf wird ein 2tes Segment ebenso behandelt, an das erste angestoßen, und die Fuge zwischen beyden mit einem Papiersegment überleimt ꝛc. Hat man auf diese Art die ganze hölzerne Kugel mit Chartendeckel überzogen, so schneide man, wenn alles hinlänglich getrocknet ist, diesen Ueberzug nach einer Fuge ringsum auf, nehme die hölzerne Kugel heraus, leime die zwey Halbkugeln von Chartendeckel wieder zusammen, und überziehe endlich die so verfertigte halbe Kugel mit Papiersegmenten. Am schön-

ſten aber wird die Kugel, wenn man ſie aus mehrern hundert Papierſegmenten, die einzeln auf einander geleimt werden, zuſammenſetzt.

Noch weniger Schwierigkeit, als das Bisherige, hat das Zeichnen der Netze

B) ſenkrechter halbregulärer Körper,

zu den wir jetzt übergehen.

1) Das Netz zu einem ſenrechten, prismatiſchen Körper aus den zur Bildung der Grund- und oberſten Fläche nöthigen Stücken, und der Höhe des Körpers, z. B. zu einem ordentlichen ſechseckigten Prisma.

Es ſey (Fig. 63.) AB die Seite des regulären Sechsecks, CD die Höhe des zu verfertigenden Körpers. Zeichne auf IK = AB das reguläre Sechseck IKHFEG, aber auch das Rektangel IKML, und mache deſſen Höhe KM = CD; ſetze auf LM ein mit dem erſtern übereinkommendes reguläres Sechseck, LMOPQN; verlängere IK und LM; trage auf jede dieſer Verlängerungen die Seite des Sechsecks noch fünfmal, nach R und a, nach S und Z ꝛc. und ziehe endlich die Linien Ra, SZ ꝛc.

Wären die Grund- und oberſte Fläche irreguläre (jedoch unter ſich übereinkommende) Flächenfiguren; ſo

müßte KR = KH, RS = HF ꝛc., deßgleichen Ma = MO, aZ = OP ꝛc. gemacht werden.

Auch wird auf die nemliche Art das Netz zu einem gewöhnlichen senkrechten Cylinder gebildet, dessen Grund- und oberste Fläche Cirkel sind. An die Stelle der Sechsecke in der Figur kommen zwey mit ihrem gegebenen Radius beschriebene Cirkelflächen, IL wird = der Höhe des Cylinders, und IV und LW werden der aus dem Diameter berechneten Peripherie jener Cirkelflächen gleich gemacht, wobey nur noch zu bemerken, daß das Rektangel IVWL, damit es sich leicht krümmen lasse, stark gefalzt, oder auch, zumal wenn der Chartendeckel dick ist, angefeuchtet, und dann um einen hölzernen Cylinder gebunden werden muß, bis es wieder trocken ist.

2) Das Netz zu einem senkrechten zugespitzten Körper aus den zur Bildung der Grundfläche nöthigen Stücken und der Seitenhöhe oder Kante des Körpers, z. B. zu einer ordentlichen fünfeckigten Pyramide.

Es sey (Fig. 64.) CM die Seite des regulären Fünfecks, und AB die Seitenhöhe der zu verfertigenden Pyramide. Zeichne auf EF = CP das reguläre Fünfeck EFHIG, aber auch das gleichschenklichte Dreyeck EFD, so, daß ED und FD = AB; ziehe ferner mit DE den Bogen EO; mache FK, KL ꝛc. = EF, und ziehe endlich die Chorden FK, KL ꝛc. und die Linien DK, DL ꝛc., so ist geschehen, was man verlangte.

Bey unordentlichen Pyramiden, bey welchen die Grundfläche eine irreguläre Flächenfigur ist, dürfen, wie natürlich, jene Chorden nicht gleich, sondern müssen, der Ordnung nach, = den Seiten der irregulären Grundfläche gemacht werden.

Beym senkrechten gewöhnlichen Kegel, dessen Grundfläche ein Cirkel ist, kommt dieser Cirkel an die Stelle des regulären Fünfecks in der Figur; die Peripherie desselben wird berechnet (sie sey z. B. 2°5′) und der Bogen EN eben so lang gemacht, als jene gefundene Peripherie. Man sucht nemlich aus dem Radius DE den ihm zugehörenden Umkreis (er sey = 7°5′), und schließt: eben so oft, als die Peripherie der Grundfläche (2°5′) im Umkreis des Radius DE (in 7°5′) enthalten ist, eben so oft muß auch die Anzahl der Grade des Bogens EN in 360° enthalten seyn. Folglich darf man nur mit jenem Quotienten ($\frac{75}{25} = 3$) in 360° dividiren, um das Maaß des Bogens EN oder des Winkels EDN (120°) zu finden, welcher mit dem Transporteur auf ED getragen wird.

3) Das Netz zu einem senkrechten abgekürzten Körper aus den zur Bildung der Grundfläche nöthigen Stücken, der Seitenhöhe des abgekürzten, und der Seitenhöhe des ganzen zugespitzten Körpers, von welchem jener ein Stück ist, z. B. zu einer ordentlichen abgekürzten fünfeckigten Pyramide.

Zeichne (Fig. 64.) nach Nro. 2. das Netz der gan=

zen zugespitzten Pyramide; schneide von der Seitenhöhe derselben, von ED die Seitenhöhe Ee der zu verfertigenden abgekürzten ab; beschreibe mit De den Bogen en; ziehe die Chorden ef, fk ꝛc., und setze endlich auf ef ein der Grundfläche ähnliches reguläres Fünfeck efhig.

Beym senkrechten abgekürzten Kegel muß aus dem Radius De und dem Winkel EDN die Länge des Bogens en, nach §. 101, berechnet, diese als Peripherie angesehen, und daraus, nach §. 98, der Diameter des Cirkels gesucht werden, der in der Figur an die Stelle des kleinern regulären Fünfecks zu setzen ist.

§. 106.

Die Oberflächen der im vorigen §., rücksichtlich ihrer Netze, abgehandelten Körper wird jeder, der jenen §. verstanden hat, und im Ausrechnen der Flächenfiguren bewandert ist, ohne besondere Anweisung berechnen können. Es werden nemlich alle, den Körper einschließenden Flächen besonders berechnet, und ihre Inhalte addirt, wobey es sich von selbst versteht, daß, wenn unter jenen einschliessenden Flächen, wie z. B. bey den ordentlichen halbregulären und bey den ganz regulären Körpern, mehrere übereinkommend sind, nur Eine derselben berechnet, und ihr Inhalt mit ihrer Anzahl multiplicirt wird.

Nur die Oberfläche der Kugel bedarf einer besondern Regel der Berechnung. Ihr Diameter wird gemessen, indem man (Fig. 65.) auf eine Ebene FG zwey Winkelmaaße HDI und MEL so aufstellt, daß sie die

Kugel K in A und B berühren, wo sodann DE oder der Abstand jener Winkelmaaße dem Diameter AB gleich ist. Aus diesem Diameter wird auf die gewöhnliche Art (nach §. 98.) die Peripherie eines sogenannten größten Cirkels der Kugel, d. i. eines solchen Cirkels gesucht, dessen Fläche durchs Centrum der Kugel geht, und sodann diese gefundene Peripherie mit dem Diameter multiplicirt.

Diese äußerst einfache Regel beruht auf folgenden Gründen:

Man denke sich (Fig. 66.), daß der Halbkreis BUVG sich ganz um seinen Diameter BG drehe, so, daß er wieder in seine vorige Lage kommt, so wird der durchlaufene Raum eine Kugel seyn. Bey dieser Bewegung beschreibt jedes Punkt der halben Peripherie einen Cirkel, und zwar einen desto kleinern, je näher es einem von den zwey Punkten B oder G liegt. Zwey solche sehr nahe bey einander liegende Punkte U und V (in der Zeichnung mußten sie, der Deutlichkeit wegen, in beträchtlicher Entfernung von einander angenommen werden) haben zwischen sich einen sehr kleinen Bogen UV, für den man, wegen seiner Kleinheit, ohne Fehler die Tangente PQ setzen kann. Diese Tangente PQ beschreibt, während der Umdrehung des Halbkreises, die Seitenfläche eines sehr niedrigen abgekürzten Kegels, welche Seitenfläche ein Paralleltrapez seyn wird, dessen größere parallele Seite die vom Punkte Q, dessen kleinere die vom Punkte P beschriebene Peripherie, und dessen sehr kleine Höhe = der Tangente PQ ist. Der Inhalt dieser Seitenfläche wird

daher (§. 82. Nro. 1) gefunden, wenn man die zum Radius DP gehörende Peripherie zu der zum Radius FQ gehörenden Peripherie addirt, die Summe mit 2 dividirt und diese Häifte mit PQ multiplicirt. Da aber die zwischen jenen beyden Peripherien gerade in der Mitte liegende, zum Radius EA gehörende Peripherie der halben Summe jener beyden Peripherien gleich ist; so wird jene Seitenfläche des abgekürzten Kegels auch durch Multiplication von PQ mit der zu EA gehörenden Peripherie erhalten werden.

Nun ist, wenn man CA zieht, das △ PZQ ∽ dem △ AEC, indem s = y = 90°, r = m, m = z (= dem Bogen AB. §. 93. Nro. 11.) und folglich auch r = z; und daher ist UZ, oder die ihr gleiche Linie DF, eben so oft in PQ, als EA in CA, oder (weil alle Cirkel ähnlich, folglich die Peripherien zweyer Cirkel eben so oft als ihre Radien in einander enthalten sind) auch DF in PQ eben so oft, als die Peripherie von EA in der Peripherie von CA enthalten. Statt dem Produkt PQ × Peripherie von EA kann man daher auch das Produkt DF × Peripherie von CA setzen, denn um eben so vielmal als dieß letztere Produkt wegen dem größern Faktor (Peripherie von CA) größer ist, um eben so vielmal ist es auch wegen dem andern kleinern Faktor (DF) kleiner als das erste.

Der nemliche Beweis findet bey allen den sehr niedrigen abgekürzten Kegeln Statt, deren Seitenflächen zusammen die Oberfläche der Kugel ausmachen — es ist die Seitenfläche eines jeden = der Kugelperipherie mul-

tiplicirt mit der sehr niedrigen Höhe des Kegels. Die Summe aller dieser sehr kleinen Höhen ist aber = BG, oder dem Diameter der Kugel, und folglich wird die Summe aller jener Seitenflächen, d. i. die Oberfläche der Kugel erhalten werden, wenn man die Peripherie der Kugel mit ihrem Diameter multiplicirt.

§. 107.

Zwey Körper sind übereinkommend (§. 10. Nro. 5), wenn sie von gleich vielen, in der nemlichen Ordnung an einander gefügten und übereinkommenden Flächenfiguren eingeschlossen sind; sie können alsdann blos durch ihren Ort von einander unterschieden werden. Sind hingegen jene Flächenfiguren blos ähnlich, jedoch so, daß wenn die Seiten irgend einer Fläche beym ersten Körper z. B. das Dreyfache von den Seiten der gleichnamigten Fläche beym zweyten Körper wären, dieß auch bey je 2 andern gleichnamigten Flächen der Fall ist, d. i. herrscht bey jenen ähnlichen Flächenfiguren auch durchaus einerley Gesetz des Größer- oder Kleinerseyns, so sind die Körper blos ähnlich; sie können alsdann nur durch ihre Größe von einander unterschieden werden. Blos gleich endlich können 2 der verschiedenartigsten Körper seyn. Sie sind es, wenn sie nicht ähnlich sind, sondern nur aus gleichvielen und gleichgroßen Raumtheilen bestehen, oder wenn sie einerley Ausdehnung haben. Wir wollen nun untersuchen, unter welchen Bedingungen dieß letztere 1) bey 2 gleichdicken 2) bey 2 zugespitzten, und endlich 3) bey einem gleichdicken und einem zugespitzten der Fall seyn wird.

1) Zwey gleichdicke oder prismatische Kör-

per sind gleich, wenn sie gleiche Grundflächen und Höhen haben. Hier können

a) entweder ihre Grundflächen übereinkommend, und

a) beyde Körper senkrecht seyn, und dann sind die Körper selbst übereinkommend, folglich auch gleich.

b) Oder der eine Körper Nro. 1 (Fig. 67.) ist senkrecht, und der andere Körper Nro. 2 schief. Hier ist der parallele Durchschnitt g $\cong$ der Grundfläche a, weil der Körper gleichdick ist, und eben so der parallele Durchschnitt m $\cong$ der Grundfläche b. Es ist aber, nach der Voraussetzung, a $\cong$ b, und daher auch g $\cong$ m. Da nun das nemliche von je zwey andern parallelen Durchschnittsflächen bewiesen werden kann, und die Höhen dc und ef gleich sind, mithin bey beyden Körpern gleichviele solcher parallelen Durchnitte gemacht werden können, so haben beyde einerley Ausdehnung, d. i. sie sind gleich,

c) Oder es sind endlich beyde Körper schief, in welchem Fall der Beweis ganz eben so, wie in lit. b geführt wird.

b) Auch dann, wenn die Grundflächen nicht übereinkommend, sondern blos gleich sind, wenn z.

B. die eine ein Rektangel und die andere ein Rhomboide, die eine ein Dreyeck und die andere ein Fünfeck, die eine ein Quadrat und die andere ein Cirkel ist ꝛc., findet, es mögen nun beyde Körper senkrecht, oder beyde schief, oder der eine senkrecht, der andere schief seyn, der oben in lit. a. b. vorgetragene Beweis Statt; nur ist alsdann, weil a nur $=$ b, auch g nicht $\cong$ sondern nur $=$ m.

2) Auch zwey zugespitzte, deßgleichen zwey abgekürzte Körper, welche gleiche Grundflächen und Höhen haben, sind gleich.

a) Wenn die Grundflächen übereinkommend, und

a) beyde Körper senkrecht sind, so sind auch die Körper selbst übereinkommend, folglich gleich.

b) Ist hingegen der eine Körper Nro. 1. (Fig. 68.) senkrecht, der andere Körper Nro. 2 schief, und sind e und m parallele, in gleichen Höhen befindliche Durchschnittsflächen, so ist e $\backsim$ c und m $\backsim$ d (§. 104.) also weil c $\cong$ d, auch e $\cong$ m; denn um eben so vielmal, als e kleiner ist als c, um eben so vielmal ist m kleiner als d, mithin sind, weil c $=$ d, e und m um gleichvielmal kleiner als zwey gleiche Größen, d. i. auch sie sind gleich. Dieß nemliche läßt sich aber von je 2 in gleichen Höhen befindlichen Durchschnitts-

flächen

flächen beweisen, und folglich haben diese beyde gleichhohen Körper in jedem Punkt ihrer Höhe gleiche Ausdehnung, d. h. sie sind gleich.

c) Auch bey zwey schiefen Körpern findet derselbe Beweis Statt.

b) Sind endlich die Grundflächen nicht übereinkommend, sondern nur gleich, ist z. B. die eine ein Dreyeck und die andere ein Cirkel, so ändert sich, beyde Körper mögen senkrecht, oder beyde schief, oder der eine senkrecht und der andere schief seyn, der obige Beweis blos dahin ab: $e \backsim c$ und $m \backsim d$, folglich, weil c nicht $\cong d$, sondern nur $= d$ auch e nicht $\cong m$, sondern nur $= m$.

3) **Ein gleichdicker und ein zugespitzter Körper sind gleich, wenn der letztere bey gleicher Höhe eine dreymal so große Grundfläche, oder bey gleicher Grundfläche eine dreymal so große Höhe, als der erstere hat;**

oder

jeder zugespitzte Körper ist $\frac{1}{3}$ eines gleichdicken, wenn die Grundflächen und Höhen bey beyden gleich sind.

Die Wahrheit dieses, für die Berechnung der Körper äußerst wichtigen Satzes ergibt sich auf folgende Art:

a) Lege bey dem ordentlichen dreyeckigten Prisma (Fig. 69.) durch D, A und B, deßgleichen durch E, D und B eine Ebene, so zerfällt hierdurch das Prisma in drey dreyeckigte Pyramiden, welche alle gleiche Grundflächen und Höhen haben. Es hat nemlich

Die erste DACB zur Grundfläche das △ DAC, und zur Höhe die Linie BG oder die Höhe des gleichseitigen △ ACB;

Die zweyte DBFE zur Grundfläche das △ DBF, und zur Höhe die Linie EH oder die Höhe des gleichseitigen Dreyecks EDF; und die dritte DAEB zur Grundfläche das △ DAE, und, wie die erste, zur Höhe die Linie BG. Diese letzte Pyramide muß, da sie sich in der Zeichnung nicht deutlich genug darstellen läßt, an einem wirklich durchschnittenen hölzernen Prisma nachgesehen werden.

Da nun diese 3 Pyramiden, wie oben behauptet wurde, und was sich aus dem bisherigen leicht vollends folgern läßt, gleiche Grundflächen und Höhen haben, folglich, nach Nro. 2, von gleicher Größe sind; so muß jede derselben $= \frac{1}{3}$ des Prismas seyn, weil sie zusammen das Prisma ausmachen. Nimmt man nun bey der Pyramide DACB das △ ACB als Grundfläche an, so ist CD die Höhe derselben, und es haben alsdann die Pyramide und das Prisma übereinkommende Grundflächen und gleiche Höhen. Mithin ist eine dreyeckigte Pyramide, welche mit

einem dreyeckigten Prisma eine übereinkommende Grundfläche und gleiche Höhe hat, = $\frac{1}{3}$ des Prismas.

b) Da sich ferner jedes Vier- und Vieleck durch Diagonalen in Dreyecke zerlegen läßt, und wenn man dieß bey der Grund und obersten Fläche eines vier- oder vieleckigten Prismas thut, und durch die übereinstimmenden Diagonalen Ebenen legt, jenes Prisma in eben so viele dreyeckigte zerfällt, als die Grundfläche Seiten hat, weniger 2; und da auch jede vier oder vieleckigte Pyramide, welche mit einem solchen Prisma eine übereinkommende Grundfläche und gleiche Höhe hat, auf gleiche Weise in eben so viele dreyeckigte Pyramiden zerlegt werden kann: so erhält man hierdurch für jedes dreyeckigte Prisma eine dreyeckigte Pyramide, welche, nach lit. a, $\frac{1}{3}$ von jenem ist, und daher muß auch die g a n z e vier- oder vieleckigte Pyramide $\frac{1}{3}$ von dem g a n z e n vier- oder vieleckigten Prisma seyn, welches mit jener eine übereinkommende Grundfläche und gleiche Höhe hat.

c) Und da endlich Cirkel als reguläre Vielecke von s e h r vielen und s e h r kleinen Seiten angesehen werden können; so findet das sub. lit b. Gesagte auch bey Cylindern und Kegeln, welche übereinkommende Grundflächen haben, und deren Höhen gleich sind, Statt.

Bey diesem ganzen Beweis ist voraus gesetzt wor-

den, daß der zugespitzte und der gleichdicke Körper nicht nur gleiche, sondern übereinkommende Grundflächen haben. Es muß daher jetzt noch gezeigt werden, daß der obige Satz auch bey bloßer Gleichheit der Grundflächen seine Richtigkeit habe. Wir wollen annehmen, eine vier-eckigte Pyramide, deren Grundfläche ein Quadrat sey, habe mit einem unordentlichen fünfeckigten Prisma, dessen Grundfläche ein irreguläres Fünfeck ist, gleiche Höhe, und es sey die Grundfläche der Pyramide, welche wir A nennen wollen, = der Grundfläche des Prismas, welche B heißen mag. Nun denke man sich eine zweyte fünfeckigte Pyramide, deren Höhe ebenfalls = der Höhe des Prismas, und deren Grundfläche C mit der Grundfläche B übereinkommend sey; so wird diese zweyte Pyramide, nach obigem Beweis, = $\frac{1}{3}$ vom Prisma seyn. Da aber C $\cong$ B und A = B, so ist auch C = A, folglich (nach Nro. 2., lit. b.) die zweyte Pyramide = der ersten Pyramide, und daher auch diese = $\frac{1}{3}$ vom Prisma.

§. 108.

Wenn ein Körper ausgemessen werden soll, so muß, wie natürlich, auch der Maaßstab, dessen man sich dazu bedient, ein Körper, und zwar wiederum von der Art seyn, daß, wenn man ihn wiederholt an einander legt, keine leeren Zwischenräume entstehen. Dieß ist unter den regulären Körpern, die durch eine einzige Linie bestimmbar sind, allein bey dem Kubus oder Hexaedron der Fall, der in 6 gleiche Quadrate eingeschlossen ist. Er allein taugt daher zu einem geometrischen Körpermaaß

und von ihm hat das geometrische Körpermaaß den Namen Kubikmaaß erhalten.

Spricht man daher von Kubikruthen, Kubikschuhen, Kubikzollen ꝛc., so muß man sich Kubi denken, deren 6 gleiche einschließende Flächen, Quadratruthen, Quadratschuhe, Quadratzolle ꝛc. sind. Hat nun die Seite dieser Quadrate, d. i. die Längenruthe, der Längenschuh ꝛc. die gemeine Eintheilung, so erhält man gemeines, ist hingegen jene Eintheilung zehntheilig, Decimalkubikmaaß.

Gesetzt, wir hätten einen Kubus (Fig. 70.) dessen einschließende Flächen die gemeine 12füßige Quadratruthe wäre, so hätten auf der Fläche ABCD, die hier als Grundfläche betrachtet wird, (nach §. 96.) 12mal 12 oder 144 Kubikschuhe Platz. Da nun der Kubus auch 12 Schuh = BE = CF hoch ist, so gibt es 12 solche Schichten, von welchen eine jede 144 Knbikschuhe enthält. Es enthält daher die 12füßige Kubikruthe 12 × 144 (oder 12 × 12 × 12) = 1728 Kubikschuhe. Aus gleichem Grunde gehen auf die 16füßige 16 × 256 (oder 16 × 16 × 16) = 4096, auf die 6füßige, oder auf das Kubikklafter 6 × 36 (oder 6 × 6 × 6) = 216, und auf die 10füßige oder Decimalkubikruthe 10 × 100 (oder 10 × 10 × 10) = 1000 Kubikschuhe. Vom Fuß an geht es im gemeinen Längenmaaß durchaus von 12 zu 12, im Decimalmaaß aber von 10 zu 10; daher hat im erstern jeder Kubikschuh 1728 Zolle, jeder Zoll 1728 Linien ꝛc. im Decimalmaaß aber jede Einheit einer höhern Sorte 1000

Einheiten der nächstniedrigern. Das neufranzösische und das neue Badische Kubikmaaß sind, rücksichtlich ihrer Eintheilung, aus folgender Tabelle ersichtlich:

Neufranzösisches Kubikmaaß.	Liter.	Neues Badisches Kubikmaaß.	Kubikschuhe.
1 Myrialiter	10000	1 Kubikruthe	1000
1 Kiloliter (Kubikmeter)	1000	(1 Kubikklafter)	216)
1 Hektoliter	100	1 Kubikschuh	1
1 Dekaliter	10	1 Kubikzoll	0,001
1 Liter (Kubikdecimeter)	1	1 Kubiklinie	0,000001
1 Deciliter	0,1		
1 Centiliter	0,01		
1 Milliliter (Kubikcentimeter)	0,001		

Die Signaturen des Kubikmaaßes sind dieselbe, deren wir uns beym Längen- und Quadratmaaß bedienten, und was dort über den Gebrauch derselben gesagt wurde, gilt auch hier, jedoch mit dem Unterschied, daß beym Decimalkubikmaaß die verschiedenen Sorten nur dann unmittelbar neben einander geschrieben werden dürfen, wenn keine Sorte fehlt, und jede (die höchste, welche auch nur 2 oder 1 Stelle haben kann, ausgenommen) drey Stellen, nemlich Hunderter, Zehner, und Einer hat.

Beyspiele.

207 Ruthen, 999 Schuh, 304 Zoll, 700 Linien Decimalkubikmaaß wird geschrieben:

207°999′304″700‴ (10′c)

7 R., 870 Fuß, 110 Zoll D. K. M.

7°870′110″ (10′c)

Hingegen 22 R., 31 Fuß, 2 Zoll D. K. M.

22°. 31′. 2″ (10′c.)

5007 R., 4042 Fuß, 719 Zoll 16füßiges K. M.

5007°. 4042′.719″ (16′c.)

A) Durch Multiplication mit den Eintheilungszahlen wird auch hier gefunden, wie viel irgend eine Zahl einer höhern Sorte in einer beliebig niedrigern betrage.

Beyspiele.

1) Beym gemeinen Maaß.

Wie viel geben 11 sechzehnfüßige Ruthen Zolle?

Antwort: 77856768'' (16/c.)

2) Beym Decimalmaaß.

Wie viel geben 50 Decimalkubikschuhe Linien?

Antwort: 50000000''' (10/c.)

Daher die Regel beym Decimalmaaß:

Hänge für jede Signatur drey Nullen an.

Wenden wir diese Aufgabe auf die 10, 16, 12 und 6füßige Kubikruthe an, so ergiebt sich folgende Vergleichungstabelle zwischen dem Decimal und gemeinen Kubikmaaß.

Decimal Kubikmaaß	Gemeines Kubikmaaß		
	16füßiges	12füßiges	6füßiges
1°	1°	1°	1°
1000'	4096'	1728'	216'
1000000''	7077888''	2985984''	373248''
1000000000'''	12230590464'''	5159780352'''	644972544'''

D. h. die 6füßige Kubikruthe z. B. hat nach der gewöhnlichen Eintheilung 373248, nach der Decimaleintheilung aber 1000000 Kubikzoll. *)

B) Durch Division mit den Eintheilungszahlen findet man, wie viel irgend eine Zahl einer niedrigern Sorte in höhern Sorten betrage.

Beyspiele.

1) Beym gemeinen Maaß.

Wie viel geben 688250032 Kubiklinien der 12füßigen Ruthe in höhern Sorten?

Antwort: 230'.852''.1456''' (12'c.)

2) Beym Decimalmaaß.

Wie viel geben 2360850963421 Kubiklinien der Decimalruthe in höhern Sorten?

Antwort: 2360°850'963''421''' (10'c.)

Daher die Regel beym Decimalmaaß:

Signire von der Rechten zur Linken, so, daß jede Signatur 3 Stellen bekommt.

---

*) Vergleiche die Anmerk. im §. 34.

C) Mehrere Sorten werden auf Eine und zwar auf die niedrigste der gegebenen gebracht, wenn man mit den Eintheilungszahlen multiplicirt, und bey jeder Multiplication die etwa gegebenen niedrigern Sorten addirt.

Beyspiele.

1) Beym gemeinen Maaß.

Wie viel geben 2'.114'' der 6füßigen Ruthe Kubikzolle?

Antwort: 3570'' (6'c.)

2) Bey Decimalmaaß.

Wie viel geben 8°.26'.3''' der Decimalruthe Kubiklinien?

Antwort: 8026000003''' (10'c.)

Daher die Regel beym Decimalmaaß.

Fülle die fehlenden Stellen mit Nullen aus; oder bestimmter: schreibe für jede Sorte, die ganz fehlt, drey Nullen, setze bey jeder, die nur Zehner und Einer hat, Eine, und bey jeder, die nur Einer hat, zwey Nullen vor. Hiervon ist, wie natürlich, die höchste Sorte abermals ausgenommen.

D) Bey der Addition und Subtraktion des gemeinen Kubikmaaßes wird verfahren, wie bey andern mehrsortigen Zahlen, beym Decimalmaaß aber, wie bey Einsortigen, nachdem man zuvor alles, nach lit. C, auf einerley niedrigste Sorte gebracht hat.

Beyspiele.

1) Beym gemeinen Maaß.

a) Wie viel geben 14°.3′.1186‴ + 107°.5″ + 6′.87″ sechzehnfüßiges Kubikmaaß?

Antwort: 121°.9′.92″.1186‴ (16′c.)

b) Wie viel geben 18°.1640″.2‴ — 6°.1727′.1642″.1720‴ zwölffüßiges Kubikmaaß?

Antwort: 11°.1725″.10‴ (12′c.)

2) Beym Decimalmaaß.

a) Wie viel geben 120°135′.177‴ + 6′ 8″ + 61′113″672‴?

Antwort: 120°202′121″849‴ (10′c.)

b) Wie viel geben 3084°.6‴ — 3083°. 2′999″ 999‴?

Antwort: 997'000''007''' (10'c.)

E) By der Multiplication.

1) Des Kubikmaaßes mit einer unbenannten Zahl wird auch das Produkt Kubikmaaß.

a) Ist hier die Multiplicande gemeines Maaß, so wird mit ihr, wie mit jeder andern mehrsortigen Zahl verfahren, z. B.

Wie viel geben 12'.3''.7''' sechzehnfüßiges Kubikmaaß × 400?

Antwort: 1°.704'.1201''.1072''' (16'c.)

b) Ist die Multiplicande Decimalmaaß und auf einerley niedrigste Sorte gebracht, so kann sie wie eine Einsortige Zahl behandelt werden, z. B.

Wie viel geben 97°104'.3''.16''' × 20?

Antwort: 1942°080'060''320''' (10'c.)

2) Wird Quadratmaaß mit Längenmaaß multiplicirt, so erhält man im Produkt Kubikmaaß *)

---

*) Siehe die Anmerk. in §. 75.

a) Beym gemeinen Maaß bringe beyde Faktoren auf einerley niedrigste Sorte, und suche dann, nach vollbrachter Multiplication, aus dem Produkt die höhern Sorten durch Division; z. B.

Wie viel geben 3°.2'.16'' zwölffüßiges Quadratmaaß × 2° zwölffüßigem Längenmaaß?

Antwort: 6°. 50'.1152'' (12'c)

b) Viel leichter ist dieselbe Arbeit beym Decimalmaaß, z. B.

Wie viel geben 50°.3'16'' Decimalquadratmaaß × 3°.6'' Decimallängenmaaß?

Antwort: 153°096'696'' (10'c.)

F) Bey der Division,

1) des Kubikmaaßes durch eine unbenannte Zahl ist auch der Quotient Kubikmaaß.

a) Das gemeine Maaß wird wie jede andere mehrsortige Zahl dividirt. Z. B.

Wie viel geben 2°.5'' sechzehnfüßiges Kubikmaaß in 5 gleiche Theile getheilt?

Antwort: 1638'.692⅘'' (16'c.)

b) In Decimalmaaß dividirt man wie in eine Einsortige Zahl, nachdem man es zuvor auf einerley niedrigste Sorte gebracht hat. Z. B.

Wie viel geben $16^{\circ}.7'.22''$ dividirt durch 20?

Antwort: $800'351\frac{1}{10}''$ (10'c.)

2) Wird Kubikmaaß durch Kubikmaaß dividirt, so erhält man zum Quotienten eine unbenannte Zahl.

a) Beym gemeinen Maaß.

Wie viel geben $3^{\circ}.212'$ dividirt durch 18' sechzehnfüßiges Kubikmaaß?

Antwort: $47\frac{7}{9}$.

b) Beym Decimalmaaß.

Wie viel geben $3^{\circ}.5'.99''$ dividirt durch 882' Decimalkubikmaaß?

Antwort: $3\frac{359099}{882000}$.

3) Kubikmaaß durch Quadratmaaß dividirt gibt zum Quotienten Längenmaaß. *)

---

*) Siehe die Anmerkung in §. 76.

a) Beym gemeinen Maaß.

Wie viel geben $6^{\circ}.1000'$ zwölffüßiges Kubikmaaß dividirt durch $2^{\circ}.6'$ zwölffüßiges Quadratmaaß?

Antwort $3^{\circ}.2\frac{195}{294}'$ (12'l.)

b) Beym Decimalmaaß.

Wie viel geben $8^{\circ}.9''$ Decimalkubikmaaß dividirt durch $1^{\circ}91'.2''$ Decimalquadratmaaß?

Antwort: $4^{\circ}1'8\frac{15373}{19102}''$ (10'l.)

4) Endlich gibt Kubikmaaß durch Längenmaaß dividirt zum Quotienten Quadratmaaß. *)

a) Beym gemeinen Maaß.

Wie viel geben $15'.6''$ sechsfüßiges Kubikmaaß dividirt durch $1'.3''$ sechsfüßiges Längenmaaß?

Antwort: $12'.\frac{6}{15}''$ (6'q.)

b) Beym Decimalmaaß.

Wie viel geben $8^{\circ}355'.2''$ Decimalkubikmaaß dividirt durch $2^{\circ}6'1''$ Decimallängenmaaß?

---

*) Siehe die Anmerkung in §. 76.

Antwort: $3^{\circ}20'11\frac{131}{261}''$ (10'q.)

G) Wie beym Längen - und Quadratmaaß, so verwandelt man auch, mit Hülfe der Tabelle in lit. A, nach Z. L. §. 110. Beysp. 2, zehntheiliges Kubikmaaß in gemeines und gemeines in zehntheiliges.

Beyspiele.

1) Zehntheiliges in gemeines.

Wie viel geben $91^{\circ}095'.3''$ (10'c.) in 6füßigem Kubikmaaß?

Antwort: $91^{\circ}.20'.899\frac{679744}{1000000}''$ (6'c.)

2) Gemeines in zehntheiliges.

Wie viel geben $122^{\circ}.31'.2''$ sechzehnfüßiges Kubikmaaß in Decimalkubikmaaß?

Antwort: $122^{\circ}007'568\ \frac{4543616}{7077888}''$ (10'c.)

H) Um Kubikmaaß des einen Orts in das eines andern zu verwandeln, bediene man sich folgender

Tabelle der uns wichtigsten Kubikmaaße in Decimal - Secundscrupel des alten Pariser Kubikschuhes ausgedruckt.

Myri-

Myrialiter	— — — — —	291738518523296
Kiloliter oder Kubikmeter	— —	29173851852329
Hektoliter	— — — — —	2917385185233
Decaliter	— — — — —	291738518523
Liter oder Kubikdecimeter	— —	29173851852
Deciliter	— — — — —	2917385185
Centiliter	— — — — —	291738518
Milliliter oder Kubikcentimeter	—	29173852
Neue Badische Kubikruthe	—	787693488264860
Neuer Badischer Kubikschuh	—	787693488265
Karlsruher	: : —	630084028517
Hochberger	: : —	606784938696
Badenw. Röt. u. Sauf.	: : —	832706445312
Freyburger	: : —	922303858904
Rheinl. (in der Pfalz)	: : —	901988705528
Würtemberger	: : —	685895617259
Baseler	: : —	774885406625
Konstanzer	: : —	816613824923

Was über den Gebrauch der ähnlichen Tabelle in §. 78 gesagt wurde, gilt auch hier.

I) Das Maaß des Brennholzes heißt ein Holzklafter, und ist ein Holzstoß, der gemeiniglich 6′ in der Länge, 6′ in der Höhe und $3\frac{1}{2}'$ bis 4′ in der Dicke oder Tiefe hat, indem bey uns in der Regel die

Scheiter diese Länge haben. Die Vorderseite eines solchen Holzklafters ist also 36 Quadratschuh; auf ihr haben 36 Kubikschuh Platz, und folglich enthält, wenn die Scheiter 4′ Länge haben, ein ganzes Holzklafter 4 × 36 = 144 Kubikschuhe, oder $\frac{2}{3}$ vom Kubikklafter.

Sind aber die Scheiter nur $3\frac{1}{2}$′ lang, so kommen auch nur 126 Kubikschuh aufs Holzklafter, und dasselbe beträgt vom Kubikklafter nur $\frac{7}{12}$.

Ist die Scheiterlänge gesetzlich bestimmt, und mithin unveränderlich, so kann die Menge des aufgesetzten Holzes nach dem Quadratinhalt der Vorderfläche gemessen werden.

Was über oder unter einem Klafter ist, wird, unter der so eben gemachten Voraussetzung, beym Abmessen des Holzes nach Höhenfußen und Höhenzollen, die man auch Klafterschuhe und Klafterzolle nennt, angegeben, und so sagt man z. B. 3 Klafter 3 Schuh, d. h. 3 Holzstoße, von welchen jeder 6′ lang und 6′ hoch, und Einer, der 6′ lang, aber nur 3′ hoch ist.

In den Badischen Unterlanden war bisher die Klafterlänge im Holzmaaß ein Unterländer Werkklafter, oder der 6fache Unterländer Werkschuh, auf welchen 8962 Zehntausendstel des alten Pariser Schuhes gehen.

In Müllheim fand sich zwar die nemliche Klafterlänge im Holzmaaß, in den Forsten aber wurde der Nürnberger

Stadtschuh gebraucht, der oben, dem Konstanzer Werkschuh gleich, zu 9347 angegeben wurde.

Das neue Badische Holzklafter ist 6 neue Badische Schuh lang; eben so hoch, und die Scheiter sollen durchaus 4 dergleichen Schuh lang seyn.

Die Einheit des neufranzösischen Holzmaaßes ist der Kubikmeter, und heißt Holzstere = 1000 Liter.

Aus den bisherigen Angaben ergiebt sich folgende

Tabelle einiger der uns wichtigsten Holzmaaße, in Decimalsecundscrupel des alten Pariser Kubikschuhes ausgedruckt.

Holzstere	— — — — —	29173851852329
Neues Badisches Holzklafter	—	113427862310160
Unterl. Holzklafter zu 4′	—	103651910370432
Unterl. = = zu 3½′	—	90695421574128
Badenw. = = in den Forsten zu 4′		117592390788912
Badenw. = = = = zu 3½′		102893341940298

Auch diese Tabelle wird wie die in §. 78 gebraucht. In den meisten Fällen aber dürften wohl folgende, beynahe wahre Vergleichungszahlen zu den vorzunehmenden Verwandlungen hinreichend seyn. Es sind:

1000	Unterl. Holzklafter	zu	4′	=	914	neue	Bad.
5	„	„	$3\frac{1}{2}$′	=	4	„	„
26	Badenw.	„	4′	=	27	„	„
11	„	„	$3\frac{1}{2}$′	=	10	„	„
1	neues Bad.	„	„	=	$3\frac{888}{1000}$	Stere.	

K) Wir haben oben, im §. 79, das Riemenmaaß kennen gelernt. Auch bey den Körpern gibt es zwey Maaße, welche mit jenem viele Aehnlichkeit haben, und von welchen das eine Schacht- das andere Balkenmaaß genannt wird. Man bedient sich desselben zum Theil noch jetzt, und gibt z. B. den Inhalt der Gräben, der Erderhöhungen, der Steinblöcke, des Schiff- und Bauholzes ꝛc. in einem oder dem andern dieser körperlichen Riemenmaaße an. Es ist daher nöthig, daß wir uns auch von ihnen einen deutlichen Begriff verschaffen, und sie sowohl in gemeines, als in Decimalkubikmaaß übersetzen lernen.

1) Vom Schachtmaaß.

Es ist hauptsächlich bey der 6füßigen Kubikruthe oder beym Kubikklafter gebräuchlich, kann aber auch auf jede andere Kubikruthe, auch auf die zehntheilige und auf den Kubikmeter angewendet werden.

Denkt man sich das Kubikklafter durch Schnitte, welche mit einer seiner Seitenflächen parallel laufen, in eben so viele Parallelepipede getheilt, als das Längenklafter Schuhe hat, das wäre in 6; so entstehen 6 Schacht-

schuhe, von welchen jeder $\frac{216}{6} = 36$ Kubikschuhe enthält. Auf ähnliche Art zerschneide man den Schachtschuh in 12 Schachtzolle, so wird jeder derselben $\frac{216}{72} = 3'^{c}$ enthalten. Die Schachtlinie ist $\frac{1}{12}$ des Schachtzolls, und enthält demnach $\frac{216}{864} = \frac{1}{4}'^{c} = 432''^{c}$, wovon der 12te Theil, oder der Schachtscrupel $36''^{c}$ beträgt. Sollen folglich Schachtschuhe, Schachtzolle ꝛc. in gemeines 6füßiges Kubikmaaß verwandelt werden; so darf man nur mit den Zahlen 36, 3, 432, 36 multipliciren, und umgekehrt mit eben diesen Zahlen dividiren, wenn gemeines 6füßiges Kubikmaaß in Schachtmaaß zu verwandeln ist.

Soll hingegen Schachtmaaß in zehntheiliges Kubikmaaß, oder umgekehrt verwandelt werden, so bediene man sich folgender Tabelle, schneide zuerst die etwa gegebenen Ruthen ab, und verwandle den Rest nach 3. L. §. 110. Beyspiel 2.

Decimalkubikmaaß.	Schachtmaaß des Kubikklafters.
1°	1°
$1000'$	$6'$
$1000000''$	$72''$
$1000000000'''$	$864'''$
1000000000000^{IV}	1036^{IV}

Z. B.

Wie viel geben $6^{\circ}.5'.7'''$ Schachtmaaß im 10füßigen Kubikmaaß?

Antwort: $6^{\circ}841'435''185'''$ (10'c.)

2) Vom Balkenmaaß.

Auch dieses Maaß wird hauptsächlich in nächster Beziehung auf das Kubikklafter gebraucht. Es ist nemlich 1 Balken ein Parallelepipedum von $\frac{1}{4}$ Quadratschuh Querschnitt und 2 Klafter Länge. In ihm haben 24 Kubi Platz, von welchen jeder $\frac{1}{2}'$ in der Seite hat, also der 8te Theil eines Kubikschuhes ist. Demnach enthält 1 Balken $3'^{c}$, und 1 Kubikklafter $\frac{216}{3} = 72$ Balken. Ein Balkenschuh ist ein Parallelepipedum von gleichem Querschnitt mit dem Balken und $\frac{2}{6}$ Klafter $= 2'$ Länge, mithin $\frac{1}{6}$ vom Balken, und $= \frac{3}{6}'^{c} = \frac{1}{2}'^{c} = 864''^{c}$. Ein Balkenzoll ist der 12te Theil vom Schuh, oder ein Parallelepiped von $\frac{1}{4}$ Quadratfuß Querfläche und $\frac{2}{12}' = \frac{1}{6}' = 2''$ Länge oder Dicke, und enthält folglich $\frac{864}{12}''^{c} = 72''^{c}$. Der 12te Theil des Balkenzolls, oder ein Parallelepiped von $\frac{1}{4}$ Quadratschuh Querfläche und $\frac{2}{12}'' = \frac{1}{6}'' = 2'''$ Länge oder Dicke ist eine Balkenlinie, und auf sie gehen daher $6''^{c}$ ꝛc.

Die Verwandlung des Balkenmaaßes in 6füßiges gemeines Kubikmaaß wird also durch Multiplication mit den Zahlen 3, 864, 72, 6; so wie die Verwandlung des letz-

fern in das erstere durch Division mit diesen Zahlen verrichtet werden,

Eine ähnliche Tabelle, wie beym vorigen Maaß, setzt uns in den Stand, Balkenmaaß auch in Decimalkubikmaaß und umgekehrt zu verwandeln.

Decimalkubikmaaß.	Balkenmaaß des Kubikklafters.
1°	1°
1000′	72 Balken.
1000000″	432′
1000000000‴	5184″
1000000000000ᴵⱽ	62208‴

Z. B.

Wie viel geben 14 Balken und 3 Balkenzolle im Decimalkubikmaaß?

Antwort: $195'023''148\frac{768}{5184}'''$ (10 c.)

§. 109.

1) Man messe, wenn (Fig. 71.) ICFH als Grundfläche des senkrechten Parallelepipeds, und CD = FE als die Höhe desselben angenommen wird, mit dem Maaßstab KL die Linien IC, IH und CD aus; so ist,

wenn KL in IC z. B. 5mal, in IH 2mal und in CD 3mal enthalten ist, der Quadratinhalt des Rektangels ICFH, nach §. 80, = 5 × 2 = 10. Auf jedem der kleinen Quadrätchen 1, 2, 3, 4 ꝛc. kann ein kleiner Kubus, dessen Seite = KL ist, stehen, und mithin haben auf der ganzen Grundfläche ICFH 10 solcher Kubi Platz, welche zusammen die Ite Schichte ausmachen. Da ferner KL in CD oder EF dreymal enthalten ist, so wird über der Iten noch eine IIte und über dieser noch eine IIIte solcher Schichten liegen, und daher die Zahl aller der kleinen Kubi, welche im ganzen Körper Platz haben = 3 × 10 = 30 seyn.

Es wird demnach der Kubikinhalt eines senkrechten Parallelepipeds gefunden, wenn man den Quadratinhalt seiner Grundfläche berechnet, und diesen mit der jener Grundfläche zugehörigen Höhe des Körpers multiplicirt.

Beym Kubus ist die Höhe der Seite der Grundfläche gleich. Man wird daher den Inhalt eines Kubus finden, wenn man seine Seite mit sich selbst, und das dadurch entstehende Produkt nochmals mit jener Seite multiplicirt.

2) Auch bey schiefen Parallelepipeden, und überhaupt bey allen gleichdicken Körpern, sie mögen senkrecht oder schief seyn, wird der Inhalt gefunden, wenn man die Grundfläche mit der Höhe

multiplicirt, indem ja, nach §. 107. Nro. 1, jeder gleichdicke Körper = einem senkrechten Parallelepiped ist, das mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat.

Bey schiefen Körpern (Fig. 67. Nro. 2.) ist, wenn b als Grundfläche angenommen wird, wie natürlich, nicht en, sondern ef die Höhe. Diese wird gefunden, wenn man den Körper mit seiner Grundfläche b auf eine horizontale Ebene stellt, von e ein Senkel herabläßt, dadurch das Punkt f findet, und endlich ef mißt.

Wirkliche Berechnung der gleichdicken Körper; Berechnung der Grundfläche und der Höhe, wenn der Inhalt und eines von jenen beyden Stücken gegeben ist.

3) Da ferner, nach §. 107. Nro. 3, jeder zugespitzte Körper = $\frac{1}{3}$ eines gleichdicken ist, der mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat; so wird der Inhalt eines jeden zugespitzten Körpers erhalten, wenn man seine Grundfläche mit der Höhe multiplicirt und ins Produkt mit 3 dividirt. Auch kann man, und zwar zuweilen mit Vortheil, den dritten Theil der Grundfläche mit der ganzen Höhe, oder die ganze Grundfläche mit dem Drittel der Höhe multipliciren.

Bey senkrechten ordentlichen Pyramiden und beym senkrechten gewöhnlichen Kegel ist die Höhe eine gerade Linie zwischen der Spitze des Körpers und dem Centrum der Grundfläche, und kann, nachdem das letztere gesucht

worden ist, mit dem Greifzirkel gemessen werden. *) Ist aber die ordentliche Pyramide oder der gewöhnliche Kegel schief, so liegt das Aufstehepunkt der Höhe entweder ausser- oder innerhalb der Grundfläche. Im erstern Fall wird sie, wie die Höhe schiefer gleichdicker Körper gefunden (Nro. 2.); im letztern Fall aber, oder wenn die Pyramide zwar senkrecht, aber unordentlich ist auf folgende Art: Stelle z. B. die schiefe 3eckigte Pyramide ABDC (Fig. 72.) auf eine horizontale Fläche HIKL, und neben dieselbe das Winkelmaaß Nro. 1. Wird nun an dieses das Winkelmaaß Nro. 2. so gehalten, daß sein Cathetus NO die Spitze C berührt, so ist, wie leicht zu erweisen, MN = der gesuchten Höhe EC.

Wirkliche Berechnung zugespitzter Körper; Berechnung der Grundfläche aus dem Inhalt und der Höhe, und der Höhe aus dem Inhalt und der Grundfläche.

4) Wüßte man bey einem abgekürzten Körper die Höhe des ganzen zugespitzten, von welchem er ein Stück ist, so wäre die Berechnung desselben leicht. Die Regel dafür ist nemlich: Rechne den ganzen zugespitzten Körper, aber auch den abgeschnittenen aus, und ziehe den Inhalt des letztern von dem des erstern ab, so ist der Rest der Inhalt des abgekürzten.

---

*) Ist a die Seitenhöhe und r der Radius der Grundfläche, so ist die wahre Höhe = $\sqrt{a^2 - r^2}$.

Die Grundfläche des abgekürzten ist zugleich Grundfläche des ganzen, die oberste Fläche des abgekürzten zugleich Grundfläche des abgeschnittenen, und die Höhe des abgeschnittenen = der Höhe des ganzen — der Höhe des abgekürzten.

Die letztere, nemlich die Höhe des abgekürzten kann auf die in Nro. 3 vorgetragene Art, aber auch beym senkrechten gewöhnlichen Kegel und der senkrechten ordentlichen Pyramide unmittelbar gemessen werden, indem sie die gerade Linie zwischen dem Mittelpunkt der Grund- und oberſten Fläche ist; wie aber die Höhe des ganzen Körpers gefunden werde, dieß soll nun, jedoch nur für die genannten Körper, nemlich für den senkrechten gewöhnlichen Kegel und die senkrechte ordentliche Pyramide gezeigt werden.

Man messe (Fig. 73.) CE = HD, oder die Höhe des abgekürzten Kegels, ferner CA und ED, oder die Radien der Grund- und obersten Fläche desselben, so ist HA = CA — ED, und, weil HD parallel mit CE, das △ AHD ∽ △ ACG, folglich AH in HD eben so oft, als AC in CG enthalten. Daher die Regel:

Dividire mit der Differenz der Radien in die Höhe des abgekürzten Kegels, und multiplicire den Quotienten mit dem größern Radius, so ist das Produkt = der Höhe des ganzen Kegels. Daß das Nemliche auch auf senkrechte ordentliche Pyramiden angewendet werden könne, erhellt von selbst.

Wirkliche Berechnung jener abgekürzten Körper aus den dazu nöthigen Stücken. (Berechnung der Grundfläche aus dem Inhalt des abgekürzten, des abgeschnittenen und der Höhe des ganzen; der obersten Fläche aus dem Inhalt des abgekürzten, des ganzen und der Höhe des abgeschnittenen; der Höhe des ganzen, aus dem Inhalt des abgekürzten, des abgeschnittenen, und der Grundfläche, und endlich die Höhe des abgeschnittenen aus dem Inhalt des abgekürzten, des ganzen und der obersten Fläche ꝛc. *)

5) Die Berechnung der ganz regulären Körper ist nunmehr leicht; denn da das Tetraedron selbst ein zugespitzter Körper ist, und man die übrigen als zusammengesetzt aus lauter übereinkommenden zugespitzten Körpern betrachten kann **), so wird blos Ei-

---

*) Wenn i = dem Inhalt des abgekürzten; O = der Grundfläche; o = der obersten Fläche; A = der Höhe des ganzen, und a = der Höhe des abgeschnittenen; so ist $\frac{O.\ A}{3}$ = dem Inhalt des ganzen, O. A = dem dreyfachen Inh. des ganzen, $\frac{o.\ a}{3}$ = dem Inhalt des abgeschnittenen, o. a = dem dreyfachen Inhalt des abgeschnittenen, und

1.) $\frac{3\,i + o.\ a}{A} = O$; 2.) $\frac{O.\ A - 3\,i}{a} = o.$

3.) $\frac{3\,i + o.\ a}{O} = A$; 4.) $\frac{O.\ A - 3\,i}{o} = a.$

**) Die vollkommenste Ueberzeugung von der Richtigkeit dieser Vorstellung wird am leichtesten durch gut gearbeitete Modelle erzweckt.

ner derselben berechnet, und sein Inhalt mit ihrer Anzahl multiplicirt.

Diese allgemeine Regel wollen wir jetzt auf jeden der 6 ganz regulären Körper anwenden.

a) Das Tetraedron ist eine dreyeckigte, und zwar senkrechte und ordentliche Pyramide, bey welcher die Seitenhöhe = der Seite der Grundfläche und die wahre Höhe = der geraden Linie zwischen der Spitze und dem Mittelpunkt der Grundfläche ist. Der Inhalt des Tetraedrons kann also leicht nach Nro. 3 gefunden werden.

b) Das Hexaedron oder der Kubus kam schon oben in Nro. 1. vor. Man kann es aber auch als zusammengesetzt aus 6 übereinkommenden vierseitigen Pyramiden betrachten, von denen jede eine einschließende Fläche des Kubus, also ein Quadrat zur Grundfläche, und die halbe Seite (Dicke) des Kubus zur Höhe hat. Man berechne daher diese Pyramide und multiplicire den Inhalt mit 6. *)

c) Das Oktaedron besteht aus 8 übereinkommen-

---

*) Es sey die Seite des Kubus = a, so ist, nach Nro. 1, der Inhalt desselben = a^3, aber auch der Inhalt Einer Pyramide = $\frac{a^2 \times \frac{a}{2}}{3} = \frac{a^3}{6}$, und folglich der Inhalt aller 6 abermals = a^3.

den Tetraedris, deren Grundflächen die 8 einschließenden Flächen des Oktaedrons sind. Ihre gemeinschaftliche Höhe wird gefunden, wenn man die gerade Linie zwischen den Mittelpunkten zweyer einander gerade gegenüberstehenden Flächen mißt, und dieselbe mit 2 dividirt. Man kann sich aber auch das Oktaedron als zusammengesetzt aus 2 übereinkommenden viereckigten Pyramiden vorstellen, deren Grundfläche Quadrate sind. Diese Quadrate haben zur Seite die Seite des Oktaedrons, und die gemeinschaftliche Höhe jener beyden Pyramiden wird erhalten, wenn die gerade Linie zwischen 2 einander gerade gegenüberstehenden Ecken des Körpers gemessen, und halbirt wird.

d) Das Ikosaedron ist zusammengesetzt aus 20 übereinkommenden Tetraedris. Die Grundflächen derselben sind die 20 einschließende Flächen des Ikosaedrons, und ihre gemeinschaftliche Höhe wird gefunden, wie oben bey den Tetraedris, aus welchen das Oktaedron besteht.

e) Das Dodekaedron enthält 12 übereinkommende fünfeckigte Pyramiden, deren Grundflächen abermals die einschließenden Flächen des Dodekaedrons sind, und deren gemeinschaftliche Höhe auch hier dadurch gefunden werden kann, daß man die gerade Linie zwischen den Mittelpunkten zweyer einander gerade gegenüberstehenden Fünfecke mißt, und halbirt.

Denkt man sich jeden der bisherigen fünf regulären Körper von einer Kugel eingeschlossen, deren Radius = der Seitenhöhe der Pyramide ist, aus welchen der Körper besteht; so liegen alle Ecken des Körpers in der Kugelfläche, und die Spitzen der Pyramiden vereinigen sich alle in der Kugel Mittelpunkt.

f) Was endlich die Kugel selbst betrifft, so darf man sich dieselbe nur durch sehr viele, in verschiedenen Richtungen durchs Centrum gehende Schnitte in sehr viele Theile zerlegt denken; so werden diese Theile lauter Pyramiden seyn, deren gemeinschaftliche Höhe der Kugelradius, und deren sehr kleine Grundflächen zusammen = der Kugelfläche seyn werden. Der Inhalt aller dieser Pyramiden, d. i. der Inhalt der Kugel wird daher erhalten, wenn man die Kugelfläche mit dem Radius multiplicirt, und das Produkt mit 3 dividirt. Auch kann die Kugelfläche mit dem Diameter multiplicirt, und ins Produkt sodann mit 6 dividirt werden.

Wirkliche Berechnung der regulären Körper aus den dazu nöthigen Stücken; Berechnung Einer einschließenden Fläche des Oktaedrons, Ikosaedrons und Dodekaedrons aus dem Inhalt des Körpers und der doppelten Höhe der Pyramiden, aus welchen er besteht; Berechnung der Höhe dieser Pyramiden aus dem Inhalt des Körpers und dem Inhalt Einer seiner einschließenden Flächen; Berechnung

der Peripherie einer Kugel aus ihrem Inhalt und ihrem Diameter *) ꝛc.

6) Endlich wird der Inhalt jedes ganz irregulären Körpers gefunden, wenn man ihn in ein hohles, senkrechtes, oben offenes Parallelepiped, das man auf eine horizontale Ebene stellt, legt, den noch übrigen Raum mit Wasser oder Sand ausfüllt, den Körper herausnimmt, die Höhe des gefallenen Wassers oder Sandes mißt, und dieselbe mit der innern Grundfläche des Parallelepipeds multiplicirt. Es ist nemlich hier der Raum, um den sich das Wasser oder der Sand, welcher letztere jedoch geebnet werden muß, setzt, = dem Raum, den zuvor der irreguläre Körper eingenommen hatte.

Wirkliche Berechnung eines irregulären Körpers; Verfahren, wenn derselbe unbeweglich ist; Berechnung eines hohlen Körpers.

§. 110.

Die Lehre von der Vergleichung und Verwandlung der Körper, mit der wir in diesem § die Stereometrie beschließen wollen, erfodert, wenn sie mit eini-

---

*) Es sey die Peripherie = p; der Diameter = d; der Inhalt der Kugel = i; so ist $\frac{pdd}{6} = i$, also $p = \frac{6\,i}{dd}$ und $d = \sqrt{\frac{i}{p}}$.

ger Vollständigkeit vorgetragen werden soll, ungleich mehr Vorkenntnisse, als nach dem Bisherigen hier vorausgesetzt werden darf. Wir heben daher nur einige der leichtesten Sätze und Aufgaben heraus.

1) Von 2 gleichdicken Körpern, deren Inhalte verschieden, deren Höhen aber demungeachtet gleich sind, ist der kleinere im größern eben so oft enthalten, als die kleinere Grundfläche des erstern in der größern Grundfläche des zweyten.

Denn bey 2 ungleichen Produkten (18 und 24), die einen Faktor (3) gemeinschaftlich haben, ($18 = 3 \times 6$ und $24 = 3 \times 8$) muß das kleinere (18) eben so oft im größern (24) enthalten seyn, als der andere Faktor des ersten (6) im andern Faktor des zweyten (8).

Anwendung hiervon auf Cylinder in Bezug auf §. 99. Nro. 2.

Wären hingegen die Grundflächen gleich, und die Höhen ungleich, so würden, aus dem nemlichen Grunde, der kleinere Körper im größern, und die kleinere Höhe des ersten in der größern Höhe des zweyten gleichvielmal enthalten seyn.

2) Eine Kugel ist $\frac{2}{3}$ von einem Cylinder, dessen Grundfläche = einem größten Cir-

kel, und dessen Höhe = dem Diameter der Kugel ist.

Dieser Satz, von seinem Erfinder Archimedes der Archimedeische genannt, läßt sich unmittelbar aus Nro. 1 erweisen. Es sey (Fig. 74) der Cylinder Nro. 2 um eine Kugel beschrieben, d. h. seine Grundfläche, der Cirkel von EF, sey = einem größten Cirkel der Kugel, und seine Höhe EG = dem Diameter derselben = EF; so ist

$$\text{Cirkel von EF} = \frac{\text{Periph. v. EF} \times \text{EF}}{4} \text{(§. 99. Nro. 1)}$$

$$\text{u. Cylinder Nro. 2} = \frac{\text{Periph. v. EF} \times \text{EF} \times \text{EF.}}{4.}$$

Nun sey ferner die Grundfläche des Cylinders Nro. 1, oder der Cirkel von AB = der Oberfläche der Kugel, also, nach §. 106, = Periph. von EF × EF, und seine Höhe AC = dem Radius der Kugel = $\frac{\text{EF}}{2}$, so ist

$$\text{Cylinder Nro. 1} = \frac{\text{Periph. v. EF} \times \text{EF} \times \text{EF,}}{2}$$

mithin, weil $\frac{1}{4}$ in $\frac{1}{2}$ zweymal enthalten ist, auch der Cylinder Nro. 2 im Cylinder Nro. 1 zweymal enthalten. Es ist aber der Cylinder Nro. 1 (nach §. 109. Nro. 5. lit. f.) = der 3fachen Kugel, also der Cylinder Nro. 2 in der 3fachen Kugel 2mal, oder in der einfachen Kugel $\frac{2}{3}$ mal enthalten, d. i. die Kugel ist $\frac{2}{3}$ vom Cylinder.

3) Bey zwey gleichdicken Körpern, deren Inhalte gleich, deren Grundflächen und

Höhen aber verschieden sind, ist die Grundfläche des ersten in der Grundfläche des zweyten eben so oft, als die Höhe des zweyten in der Höhe des erstern enthalten.

Denn bey 2 gleichen Produkten (30 = 3 × 10 und 30 = 6. 5) muß der eine Faktor des ersten (3) in einem Faktor des zweyten (6) eben so oft, als der andere Faktor des zweyten (5) im andern Faktor des ersten (10) enthalten seyn, indem das erste Produkt um eben so vielmal durch den kleinern Faktor (3) kleiner seyn muß, als es durch den größern Faktor (10) größer ist, als das zweyte Produkt.

Leicht läßt sich daher für einen gleichdicken Körper, der = einem andern gleichdicken werden soll, zu einer gegebenen Grundfläche die Höhe, oder zu einer gegebenen Höhe die Grundfläche finden, wenn die Grundfläche und Höhe des andern Körpers, dem der zu verfertigende gleich werden soll, gegeben sind. Man habe z. B. einen Cylinder, dessen Grundfläche = 36″q., und dessen Höhe = 20″l.; es soll ein dreyeckigtes Prisma verfertigt werden, dessen gegebene Grundfläche = 48″q. ist; wie groß muß man die Höhe desselben machen? Antwort: 15″l. Es ist hier die Grundfläche des Cylinders in der des dreyeckigten Prismas $\frac{48}{36} = \frac{4}{3}$ mal enthalten. Da nun die Höhe des Prismas eben so oft in der Höhe des Cylinders, in 20″l. enthalten seyn muß, so darf man nur mit $\frac{4}{3}$ in 20″l. dividiren, d. i. 20″l. mit $\frac{3}{4}$ multipliciren, welches $\frac{60}{4}$ = 15″l. gibt.

Das Nemliche erhält man, wenn man den Inhalt des Cylinders sucht, und darein mit der Grundfläche des dreyeckigten Prismas dividirt. Es ist der Inhalt des Cylinders $= 36''^{\text{q.}} \times 20''^{\text{l.}} = 720''^{\text{c.}}$, und $\frac{720''^{\text{c.}}}{48''^{\text{q.}}} = 15''^{\text{l.}}$

4) Von zwey ähnlichen gleichdicken Körpern ist der kleinere im größern eben so oft enthalten, als der Kubus irgend einer an oder in dem erstern befindlichen Linie im Kubus der gleichnamigten Linie des andern.

Es muß z. B. (Fig. 75.) das Prisma Nro. 2 im Prisma Nro. 1 so oft als df × df × df in DF × DF × DF enthalten seyn, denn weil, nach §. 85. Nro. 2. und §. 86, das △ def im △ DEF so oft, als df × df in DF × DF, und bf in BF so oft, als df in DF, so ist

△ def × bf in △ DEF × BF so oft, als df × df × df in DF × DF × DF

|| ||

also auch {Prisma Nro. 2} in {Prisma Nro. 1} so oft, als df × df × df in DF × DF × DF enthalten.

5) Die bisherigen vier Sätze gelten, weil jeder zugespitzte Körper $\frac{1}{3}$ eines gleichdicken ist, der mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat, und die Drittheile zweyer

Größen eben so oft, als die Größen selbst in einander enthalten sind, auch von zugespitzten Körpern; auch gilt der 4te Satz von je zwey ganz regulären, und überhaupt von je zwey Körpern, die ähnlich sind. Es werden daher auch je zwey Kugeln eben so oft als die Kubi ihrer Diameter in einander enthalten seyn — ein Satz, der in der Folge noch auf eine andere Art besonders bewiesen werden soll.

6) So oft 785 in 1000, eben so oft ist auch ein um die Kugel beschriebener Cylinder im Kubus des Diameters der Kugel, oder im Kubus des Diameters seiner Grundfläche enthalten; folglich ist.

a) Cylinder $= \frac{785}{1000}$ vom Kubus des Diameters, und

b) Kubus des Diameters $= \frac{1000}{785}$ vom Cylinder.

Nimmt man den Diameter der Kugel, der zugleich Diameter von der Grundfläche des Cylinders ist, zu 100 an, so ist der Cylinder $= \frac{(100 \times 314) \times 100}{4} =$ 785000, und der Kubus des Diameters $= 100 \times 100 \times 100 = 1000000$, also der Cylinder im Kubus des Diameters so oft, als 785000 in 1000000, oder 785 in 1000 enthalten.

7) Jede Kugel ist im Kubus ihres Diameters so oft, als 157 in 300 enthalten, oder es ist

a) Die Kugel = $\frac{157}{300}$ vom Kubus ihres Diameters, und

b) der Kubus des Diameters = $\frac{300}{157}$ von der Kugel.

Es sey abermals der Diameter = 100, so ist die Kugel = $\frac{(314 \times 100) \times 100}{6} = \frac{3140000}{6}$, und der Kubus des Diameters = 1000000, folglich jene in diesem so oft, als $\frac{3140000}{6}$ in 1000000, oder 3140000 in 6000000, oder 314 in 600, oder 157 in 300 enthalten.

Man darf daher nur, wenn man den Inhalt der Kugel finden will, ohne ihre Peripherie zu berechnen, den Kubus des Diameters mit $\frac{157}{300}$ multipliciren *)

8) Vermöge des vorigen Satzes ist bey zwey Kugeln von verschiedener Größe jede im Kubus ihres Diameters so oft, als 157 in 300 enthalten, folglich wird auch, weil

---

*) Auch wird der Diameter einer Kugel gefunden, wenn man den Inhalt der Kugel mit $\frac{300}{157}$ multiplicirt, und aus dem Produkt die Kubikwurzel zieht.

die kleinere Kugel im Kubus ihres Diameters so oft, als 157 in 300, und auch die größere Kugel im Kubus ihres Diameters so oft, als 157 in 300 enthalten ist,

---

die kleinere Kugel in der größern so oft,
als der Kubus des Diameters der kleinern im Kubus des Diameters der größern
enthalten seyn, indem bey zwey gleichen Quotienten ($\frac{25}{5} = 5$ und $\frac{180}{36} = 5$) die Divisoren (5 und 36) eben so oft, als die Dividenden (25 und 180) in einander enthalten sind ($\frac{36}{5} = 7\frac{1}{5}$, und $\frac{180}{25} = 7\frac{5}{25} = 7\frac{1}{5}$).

9) **Bey zwey ähnlichen Körpern von verschiedener Größe ist die Oberfläche des kleinern rücksichtlich des Kubikinhalts größer, als beym größern Körper.**

Es sey z. B. der größere ein Kubus, dessen Seite $= 1'^{l.}$, und der kleinere ein Kubus, dessen Seite $= \frac{1}{2}'^{l.}$; so ist der Inhalt des größern $= 1'^{c.}$ und der des kleinern $= \frac{1}{8}'^{c.}$, also der letztere 8mal kleiner als der erstere. Nun ist aber die Oberfläche des größern $= 6'^{q.}$, die des kleinern $= \frac{6}{4}'^{q.}$, also die letztere nicht 8mal, sondern nur 4mal kleiner, als die des erstern.

10) **Irgend ein Körper, dessen Inhalt bekannt ist, wird in einen gleichdicken von bestimmter Höhe verwandelt, wenn man mit dieser in jenen körperlichen Inhalt dividirt, und dadurch den Inhalt der Grundfläche findet.** (Vergleiche die Folgerung aus Nro. 3.)

Soll nun die Grundfläche z. B. ein Parallelogramm seyn, so wird ihr Inhalt in 2 Faktoren zerlegt, von welchen der eine die Grundlinie, der andere die Höhe des Parallelograms abgibt. Dieß nemliche geschieht, wenn die Grundfläche ein Dreyeck seyn soll; nur muß in diesem Fall einer von beyden Faktoren noch mit 2 multiplicirt werden. *)

11) Eben so wird irgend ein Körper, dessen Inhalt bekannt ist, in einen gleichdicken von bestimmter Grundfläche verwandelt, wenn man mit dieser in jenen Inhalt dividirt, und dadurch im Quotienten die der Grundfläche entsprechende Höhe findet. (Vergleiche die Folgerung aus Nro. 3.)

12) Sollte aber der Körper in einen zuge-

---

*) Wollte man zur Grundfläche einen Cirkel haben, d. h. sollte der Körper ein gewöhnlicher Cylinder werden, so wird der Diameter nach der Anmerkung zu §. 100 gesucht. Und wäre es endlich bestimmt, daß die Grundfläche ein reguläres Vieleck von einer gewissen Anzahl Seiten seyn solle; so zeichne man ein solches Vieleck in einen beliebigen Cirkel, berechne seinen Inhalt, und messe eine seiner Seiten. So oft nun jener Inhalt im Inhalt der zu bildenden Grundfläche enthalten ist, eben so oft ist auch das Quadrat jener gemessenen Seite im Quadrat der Seite des zu bildenden Vielecks enthalten. Dieses Quadrat kann also leicht gefunden, und durch Ausziehung der Quadratwurzel die Seite selbst erhalten werden, auf welche man nach §. 96. B das Vieleck zeichnet.

spitzten verwandelt werden, so darf nur mit dem Drittel der bestimmten Höhe oder Grundfläche in seinen Inhalt dividirt, oder es muß, wenn man mit der ganzen Höhe oder Grundfläche dividirt, der erscheinende Quotient noch mit 3 multiplicirt werden. *)

---

*) Die Verwandlung eines Körpers in einen Kubus geschieht durch Ausziehung der Kubikwurzel aus seinem Inhalt, indem diese Wurzel die Seite des verlangten Kubus ist, und die Verwandlung in eine Kugel dadurch, daß man nach der Anmerkung zu Nro. 7, den Diameter der Kugel sucht.

Vierter Abschnitt.

Von der Berechnung der unbekannten Seiten und Winkel wie auch der Höhe eines ebenen Dreyecks, wenn die zur Bildung desselben nöthigen Stücke gegeben sind.

(Ebene Trigonometrie.)

§. 111.

Wir haben oben im §. 53 und 64 des ersten Curses aus hinlänglich bestimmenden Stücken sowohl übereinkommende als ähnliche Dreyecke bilden gelernt. Hätte man daher bey einem Dreyeck auf dem Felde solche bestimmende Stücke, z. B. zwey Seiten und den eingeschlossenen Winkel gemessen, und wollte nun wissen, wie groß die noch übrige

Seite und die zwey andern Winkel dieses Dreyecks seyen, so dürfte man nur (nach §. 64, 2ter Hauptfall, 2te Aufgabe) auf dem Papier ein dem großen Dreyeck ähnliches Dreyeck zeichnen, und könnte dann an diesem die unbekannte Seite auf dem verjüngten Maaßstab, und die zwey unbekannten Winkel auf dem Transporteur messen. Allein die hier sowohl beym Auftragen der gegebenen, als auch beym Messen der zu findenden Stücke unvermeidliche Fehler, die, zumal wenn mehrere Dreyecke von einander abhängen (wie dieß in der Aufgabe des 68ten §. der Fall war) immer größer werden, nöthigen einen jeden, der solche und ähnliche Aufgaben mit Genauigkeit auflösen will, nach einem andern Mittel sich umzusehen, und das, was durch Zeichnung ähnlicher Dreyecke und Messung des Fehlenden an denselben höchst unvollkommen erhalten wird, blos durch Rechnung aufs genaueste zu bewerkstelligen. Dieß ist der Gegenstand der Trigonometrie. Sie heißt ebene Trigonometrie, wenn die Dreyecke, die sie zu berechnen lehrt, ebene Flächen, hingegen sphärische Trigonometrie, wenn sie auf oder innerhalb der Oberfläche einer Kugel beschrieben sind. Wir werden uns hier blos mit der erstern beschäftigen.

§. 112.

Man denke sich (Fig. 76) um das Dreyeck ABD einen Cirkel gezogen (§. 94. Nro. 3.), so sind die Seiten des Dreyecks Chorden dieses Cirkels, und die Winkel des Dreyecks sind Peripheriewinkel. Werden nun in einem andern, größern oder kleinern Cirkel von einem beliebigen Halbmesser die Bögen ab, bd und da den Bögen AB,

BD und DA den Graden nach gleichgemacht, und die Chorden ab, bd und da gezogen; so entsteht, weil die Winkel m und m, n und n, und r und r gleich sind, ein dem Dreyeck ABD ähnliches Dreyeck abd, und es verhält sich z. B. (§. 62 Nro. 6) AB : AD = ab : ad, d. i. AB : AD = Chorde des doppelten Bogens, welcher den ∠ n (= ∠ n) mißt : Chorde des doppelten Bogens, welcher den ∠ r (= ∠ r) mißt. (§. 93. Nro. 6.)

Dächte man sich nun den Radius des Cirkels abd z. B. in 1000 gleiche Theile getheilt, und hätte man für alle Bögen von 1° — 180° die Chorden in solchen Tausendtheilchen des Radius berechnet, und in eine Tabelle eingetragen; so würde, wenn in irgend einem Dreyeck ABD, außer den Winkeln n und r, die Seite AB gegeben wäre und die Seite AD gefunden werden sollte, dieselbe leicht zu berechnen seyn. Die Winkel r = r und n = n, doppelt genommen, würden die in Graden ausgedruckte Bögen ab und ad geben, zu welchen man die Chorden ab und ad in der Tabelle aufschlagen könnte. Alsdann wären in obiger Proportion

AB : AD = ab : ad

oder ab : ad = AB : AD

drey Glieder ab, ad und AB gegeben, zu welchen sich das 4te AD durch die Regel de Tri leicht finden ließe. Auf gleiche Weise würde, nach der Proportion

$$\left.\begin{matrix}ab\\ad\end{matrix}\right\}: bd = \left\{\begin{matrix}AB\\AD\end{matrix}\right\}: BD,$$

auch BD berechnet, indem, wenn n und r gegeben sind, auch m bekannt, und mithin auch bd in den Tafeln zu finden ist.

Eine solche Chordentafel hat ein gewisser Ptolomäus, im zweyten Jahrhundert nach Christi Geburt, wirklich berechnet. Da jedoch die Chorde eines Bogens, der größer als 180°, = der Chorde des Ergänzungsbogens zu 360° ist, so braucht die Tafel nicht weiter als bis auf 180° zu gehen.

§. 113.

Statt der ganzen Chorden kann man sich auch, weil die Hälften zweyer Größen sich wie die Ganzen verhalten, der halben Chorden bedienen, und es ist z. B. im △ ABD

$$AB : AD = \frac{ab}{2} : \frac{ad}{2}$$

oder es verhalten sich je zwey Seiten irgend eines Dreyecks, wie die halben Chorden der doppelten Bögen, welche die jenen Seiten gegenüberliegende Winkel messen.

Eine solche halbe Chorde des doppelten Bogens, durch welchen ein Winkel gemessen wird, heißt der Sinus des

Winkels, und es verhalten sich daher je 2 Seiten eines Dreyecks wie die Sinus der ihnen gegenüberliegenden Winkel, und die Sinus je zweyer Winkel, wie die den Winkeln gegenüberliegende Seiten. Fällt man (Fig. 77.) aus dem Centrum c auf ad eine Perpendikulare ce, und zieht ca, so ist der Bogen ae = dem Bogen ed, und af = fd (§. 93. Nro. 4), folglich ist der Winkel e = dem Winkel r (§. 93. Nro. 6) und af der Sinus von r und der Sinus von e. Versetzt man daher die Winkel am Umfang ins Centrum des Cirkels, so kann man auch sagen: der Sinus eines Winkels (e) sey die Perpendikulare (af) welche von einem Endpunkte (a) des Bogens (ae) der den Winkel mißt, auf den andern Schenkel (ce) gefällt wird.

§. 114.

Je größer (Fig. 77.) der Winkel e wird, oder jemehr sich der Bogen ae einem Viertelskreis nähert, desto größer wird auch af oder der Sinus des Winkels. Wird endlich e oder der Bogen ae = 90°, d. i. steht ac auf ce senkrecht, so fällt af auf ac; der Sinus ist dann dem Radius des Cirkels gleich, und daher bezeichnet man den Sinus von 90° nicht selten mit R oder r. Auch nennt man ihn den ganzen Sinus oder Sinus totus (S. T.), weil die Sinus der übrigen Winkel, die in Theilen des Radius ausgedruckt werden, wenn man diesen als eine Einheit betrachtet, eigentliche Brüche sind.

Ist der Winkel e (Fig. 78.) ein stumpfer Winkel, so muß sein Schenkel ce nach p verlängert werden, um die Perpendikulare af als Sinus darauf ziehen zu können. Es ist aber af auch Sinus des Winkels s oder des Ergänzungswinkels von e zu 180°, und folglich haben je 2 benachbarte Winkel einerley Sinus, so wie 2 Bögen, welche zusammen 360° ausmachen, einerley Chorden haben (§. 112.)

Hieraus ergibt sich der große Vorzug der Sinus-vor der Chordenrechnung. Denn auch abgesehen davon, daß man bey Chordentafeln die gegebenen Winkel jedesmal verdoppeln (§. 112.) und aus gleichem Grunde die darinn gefundenen halbiren muß, so müssen die Chordentafeln bis auf 180°, die Sinustafeln hingegen brauchen nur bis auf 90° zu gehen.

Solche Sinustafeln berechnete im 15ten Jahrhundert Joh. Müller (Regiomontan) für den in 10000000 getheilten Radius, und zwar für einzelne Minuten, worauf im folgenden 16ten Jahrhundert Georg Joachim (Rhaeticus) die Sinus von 10 zu 10 Sekunden zuerst für den in 10000000000, hernach sogar für den in 1000 000 000 000 000 getheilten Radius, und zwar für den ersten und 90sten Grad von Sekunde zu Sekunde berechnet hat.

Für den in 10000000 getheilten Halbmesser ist z. B. der Sinus von 16°, 31′ = 2842942. Nimmt man nun den Radius zu 1 an, so müssen von allen Sinus 7 Ziffern als Decimalstellen abgeschnitten werden, wodurch sie alle eigentliche Decimalbrüche werden. So ist, für

R = 1, Sinus von 16°. 31′ = 0,2842942. Uebrigens erhellt die Möglichkeit der Berechnung solcher Tafeln aus folgenden Beyspielen:

1) Man suche, für R = 10000000, den Sinus von 45°.

Es sey (Fig. 79.) ABGF ein in einen Cirkel beschriebenes Quadrat, so ist AB Chorde von 90°, und $\frac{AB}{2}$ = AE dem Sinus von x, oder der Sinus von 45°. Da nun der Bogen AB als Maaß des Winkels ACB = 90°, so ist das Dreyeck ACB rechtwinklicht, und AB × AB = AC × AC + BC × BC = 10 000 000 × 10 000 000 + 10 000 000 × 10 000 000 = 200 000 000 000 000, folglich AB selbst = $\sqrt{200\ 000\ 000\ 000\ 000}$ = 14142136, und $\frac{AB}{2}$ = AE = Sinus von 45° = $\frac{14142136}{2}$ = 7071068.

2) Man suche, für R = 1, den Sinus von 30°.

Es sey (Fig. 80.) ABDEFG ein in einen Cirkel beschriebenes reguläres Sechseck, so ist AG Chorde von 60°, und $\frac{AG}{2}$ = AI der Sinus von y, oder der Sinus von 30°. Nun ist aber AG = AC = 1, und $\frac{AG}{2}$ = AI = $\frac{1}{2}$; folglich Sinus von 30° = $\frac{1}{2}$ = 0,5000000.

Die

Die großen Zahlen aber, durch welche man, der Genauigkeit wegen, auf diese und ähnliche Art die Sinus größtentheils durch Annäherung ausdruckte, verursachten bey den trigonometrischen Rechnungen sehr beschwerliche Multiplicationen und Divisionen. Man suchte daher, um sich hauptsächlich bey den häufig vorkommenden Proportionalaufgaben der so bequemen logarithmischen Rechnung bedienen zu können, die Logarithmen der für den Halbmesser = 10 000 000 000 berechneten Sinus, ordnete sie in Tabellen, und fügte diese den Logarithmen der gewöhnlichen Zahlen bey. Solche Tabellen, in welcher Log. S. T. = 10,0000000, finden sich unter andern auch in Vegas, schon im §. 275 d. Z. L. empfohlenen logarithmisch trigonometrischem Handbuch. Die Einrichtung und Gebrauch dieser Tafeln wird auch hier am besten aus der ihnen vorangeschickten Einleitung erlernt; nur ist zum Verstehen ihrer Einrichtung ein deutlicher Begriff vom Cosinus eines Winkels unumgänglich nöthig.

Wird (Fig. 81.) bey dem Winkel x mit dem Radius CI der Bogen IF und auf AC die Perpendikulare GH gezogen, so ist diese Sinus von x. Errichtet man nun auf AC aus dem Scheitel C die Senkrechte CD, so entsteht ein zweyter Winkel y, der die Ergänzung von x zu 90°, und dessen Sinus, für den nemlichen Radius CI = CE, die Perpendikulare GK ist. Dieser Sinus von y heißt der Cosinus von x, so wie umgekehrt, weil x auch die Ergänzung von y, der Sinus von x der Cosinus von y ist. Es ist aber GK = HC und GH = KC, und daher ist der Cosinus eines Winkels = demjenigen Stück des Radius, welches zwischen dem Aufstehe-

punkt des Sinus und dem Mittelpunkt oder dem Vertex des Winkels liegt. Ist $x = 45°$, so ist auch $y = 45°$, und die Sinus und Cosinus beyder Winkel sind gleich. Ist $x = 20°$, so ist $y = 70°$, und folglich Cosinus von $20° =$ dem Sinus von $70°$, und der Cosinus von $70°$ $=$ dem Sinus von $20°$. Da man nun, wie in der Folge erhellen wird, auch die Cosinus der Winkel zu den trigonometrischen Rechnungen häufig braucht, so sind die Tafeln mit möglichster Ersparung des Raums so eingerichtet, daß man beyde, den Sinus und Cosinus eines Winkels, neben einander findet. Die Sinus von $1°$ biß $45°$ sind zugleich die Cosinus von $45°$ bis $90°$, und die Cosinus von $1°$ bis $45°$ zugleich die Sinus von $45°$ bis $90°$.

Ist der Sinus eines Winkels bekannt, so läßt sich daraus der Cosinus, so wie aus diesem der Sinus leicht berechnen. Denn da (Fig. 81.) GH der Sinus von x, HC dessen Cosinus und CG der Radius, so ist, weil der Winkel bey $H = 90°$,

$$\overline{\text{Sinus}}^2 + \overline{\text{Cosinus}}^2 = R^2, \text{ folglich auch}$$

$$\overline{\text{Cosinus}}^2 = R^2 - \overline{\text{Sinus}}^2$$

$$\text{und Cosinus} = \sqrt{R^2 - \overline{\text{Sinus}}^2};$$

deßgleichen

$$\overline{\text{Sinus}}^2 = R^2 - \overline{\text{Cosinus}}^2$$

$$\text{und Sinus} = \sqrt{R^2 - \overline{\text{Cosinus}}^2}$$

Es sind ferner den Logarithmentafeln der Sinus und Cosinus auch Logarithmentafeln der Tangenten und Cotangenten der Winkel für den nemlichen Halbmesser, zu welchen jene gehören, beygefügt. Diese trigonometrische Linien werden in einigen Fällen mit Vortheil statt der Sinus und Cosinus gebraucht, aus welchem Grunde auch von ihnen ein deutlicher Begriff unentbehrlich ist.

Wird (Fig. 81. a.) bey dem Winkel x mit dem Radius CI abermals ein Bogen IF gezogen, und auf AC aus dem Punkt I, als dem Aufstehepunkt des Bogens eine Perpendikulare IH bis an den andern Schenkel des Winkels errichtet, so heißt diese die Tangente des Winkels x für den Radius CI. (Sie ist die Hälfte der Seite eines um den Cirkel beschriebenen regulären Vielecks, dessen Centriwinkel der doppelte Winkel x ist, woraus die Möglichkeit ihrer Berechnung erhellt.) Der Winkel y ist auch hier, wenn CD perpendikular auf AC, die Ergänzung des Winkels x zu 90°, und EB die Tangente desselben. Daher, wie oben beym Sinus und Cosinus, EB Cotangente von x und IH Cotangente von y. Ist $x = 45^\circ$, so ist wiederum auch $y = 45^\circ$, und die Tangenten und Cotangenten beyder Winkel sind gleich. Ist x z. B. $= 33^\circ$, so ist $y = 57^\circ$, und mithin die Cotangente von 33° = der Tangente von 57°, und die Cotangente von 57° = der Tangente von 33°. Man konnte daher die Tangenten und Cotangenten eben so, wie die Sinus und Cosinus in den Tafeln ordnen.

Außer den vier bisherigen trigonometrischen Linien

(Sinus und Cosinus, Tangente und Cotangente) gibt es noch vier andere, die aber seltner gebraucht werden, und daher auch in den gewöhnlichen Tafeln nicht enthalten sind. Es ist nemlich (Fig. 81. a.) CH die Secante von x und die Cosecante von y, deßgleichen CB die Secante von y und die Cosecante von x; und (Fig. 81.) IH der Sinus versus (Quersinus) von x und der Cosinus versus von y, deßgleichen EK der Sinus versus von y und der Cosinus versus von x. Von allen diesen Linien gilt dasselbe, was im §. 114, rücksichtlich der stumpfen Winkel, vom Sinus gesagt wurde; es ist z. B. die Cotangente eines stumpfen Winkels = der Cotangente seines Nachbars. Ob aber, wenn man zu einer solchen trigonometrischen Linie den ihr zugehörigen Winkel angeben soll, der spitze oder stumpfe Winkel zu nehmen sey, müssen die nähern Umstände der Aufgabe entscheiden.

(Nimmt man den Halbmesser = 1 an, so ist bey irgend einem schiefen Winkel x

$$\text{tang. } x = \frac{\text{sin. } x.}{\text{cos. } x.}$$

$$\text{cot. } x = \frac{1}{\text{tang. } x} = \frac{\text{cos. } x}{\text{sin. } x}$$

$$\text{sec. } x = \frac{1}{\text{cos. } x} = \sqrt{1 + \overline{\text{tang. } x}^2}$$

$$\text{cosec. } x = \frac{1}{\text{sin. } x} = \sqrt{1 + \overline{\text{cot. } x}^2}$$

Diese 7 Sätze lassen sich, wenn man in Fig. 81 noch die Tangenten, oder in Fig. 81. a noch die Sinus beyder Winkel zieht, theils aus der Aehnlichkeit der Dreyecke, theils aus dem Pythagoräischen Lehrsatz leicht erweisen; es mögen daher diese Beweise dem eigenen Nachdenken des Anfängers als eine Probe überlassen seyn.)

Uebrigens ist leicht einzusehen, daß, wenn (Fig. 81. a.) der Winkel x wächst, auch seine Tangente und Secante, welche Linien sich wechselsweise in ihrer Länge bestimmen, immer größer, und daß sie sich, wenn $x = 90°$ wird, gar nicht mehr schneiden, und folglich unendlich groß seyn werden.

§. 115.

Unter der Voraussetzung, daß sich die Anfänger mit dem Aufschlagen der Logarithmen der Sinus und Cosinus, der Tangenten und Cotangenten zu gegebenen Winkeln, und umgekehrt der Winkel zu gegeben Logarithmen der Sinus und Cosinus rc. bekannt gemacht, und sich darinn schon in etwas geübt haben, schreiten wir jetzt zur wirklichen Berechnung der Seiten, Winkel und Höhe eines Dreyecks aus hinlänglich bestimmenden Stücken desselben, oder zum eigentlichen Gegenstand der Trigonometrie.

Die Aufgabe des gegenwärtigen §. sey:

Aus Einer gegebenen Seite und zwey gegebenen Winkeln den dritten Winkel, die zwey

übrigen Seiten, und die zur gegebenen Seite als Grundlinie gehörige Höhe eines Dreyecks zu finden.

Da hier der dritte Winkel immer = 180° — der Summe der beyden gegebenen ist, so sieht man sogleich, ob das Dreyeck schief oder rechtwinklicht, ob es ungleichseitig, gleichschenklicht oder gleichseitig sey. Es ist nemlich rechtwinklicht, wenn Einer der drey Winkel = 90°, schiefwinklicht, wenn dieß nicht der Fall ist, und zwar ungleichseitig, wenn kein Winkel dem andern gleich, gleichschenklicht, wenn nur zwey Winkel gleich, und gleichseitig, wenn alle drey Winkel gleich sind (§. 52. Nro. 2. lit. b. und e, und Nro. 4 und 5).

A.) Ueberhaupt, wenn das Dreyeck ungleichseitig und schiefwinklicht, oder auch rechtwinklicht ist, der rechte Winkel aber der gegebenen Seite gegenüberliegt.

Es sey (Fig. 82.) in den beyden Dreyecken CAD

gegeben	zu finden
1) Die Seite CD	1) Der ∠ z, oder x, oder r.
2) Die ∠∠. x und r oder r und z oder z und x.	2) Die Seite CA
	3) Die Seite DA
	4) Die Höhe BA;

so ist

1) $180° - (x + r) = z$, oder $180° - (r + z) = x$, oder $180° - (z + x) = r$.

ferner, nach §. 113,

2) $\sin. z : \sin. r = CD : CA$

und $l. \sin. z - l. \sin. r = l. CD - l. CA$

3) $\sin. z : \sin. x = CD : DA$

und $l. \sin. z - l. \sin. x = l. CD - l. DA$

Wäre $z = 90°$, so könnte man sich hier, statt des sin. x. mit Vortheil des cos. r bedienen, weil sein Logarithme unmittelbar neben dem Logar. sin. r steht, der bey der Anwendung von Nro. 2 aufgeschlagen werden muß.

4) in den rechtwinklichten Dreyecken BAD

$S. T. : \sin. r = DA : BA$

und $l. S. T - l. \sin. r = l. DA - l. BA$

Beyspiel.

Es sey im ersten Dreyeck der 82ten Figur

gegeben	zu finden
$CD = 20°$	$z = 87°.44'$
$x = 40°$	$CA = 15{,}82973°$
$r = 52°.16'$	$DA = 12{,}86581°$
	$BA = 10{,}17515°$

1) $179°.60' - 92°.16' = 87°.44' = z.$

2) $l.\sin. 87°.44' - l.\sin. 52°.16' = l.20 - l.CA$

$$l.20 = 1{,}3010300$$
$$l.\sin. 52°.16' = 9{,}8981038$$
$$l.20 + l.\sin. 52°.16' = 11{,}1991338$$
$$l.\sin. 87°.44' = 9{,}9996601$$
$$(l.20 + l.\sin. 52°.16') - l.\sin. 87°.44' = 1{,}1994737 = l.CA.$$

Dazu gehörige Zahl $= 15{,}82973° = CA.$

3) $l.\sin. 87°.44' - l.\sin. 40° = l.20 - l.DA.$

$$l.20 = 1{,}3010300$$
$$l.\sin. 40° = 9{,}8080675$$
$$l.20 + l.\sin. 40° = 11{,}1090975$$
$$l.\sin. 87°.44' = 9{,}9996601$$
$$(l.20 + l.\sin. 40°) - l.\sin. 87°.44' = 1{,}1094374 = l\,DA$$

Dazu gehörige Zahl $= 12{,}86581° = DA.$

$$4)\ l.\sin.90^\circ - l.\sin.52^\circ.16' = l.12{,}86581 - l.BA$$

$$l.12{,}86581 = 1{,}1094374$$

$$l.\sin.52^\circ.16' = 9{,}8981038$$

$$l.12{,}86581 + l.\sin.52^\circ.16' = 11{,}0075412$$

$$l.\sin.90^\circ = 10{,}0000000$$

$$(l.12{,}86581 + l\sin.52^\circ.16') - l.\sin.90^\circ = 1{,}0075412 = l.BA$$

Dazu gehörige Zahl $= 10{,}17515^\circ = BA$.

B) Wenn das Dreyeck gleichschenklicht ist, und zwar

a) wenn die 2 gleichen Winkel beyde an der gegebenen Seite anliegen.

Es sey (Fig. 83.)

gegeben	zu finden
1) CD	1) der 3te Winkel
2) zwey Winkel	2) CA = DA
	3) BA;

so ist

1) der dritte Winkel $= 180^\circ$ — der Summe der zwey gegebenen.

$$2)\ \sin.\frac{z}{2} : S.T. = \frac{CD}{2} : \begin{cases} CA \\ DA \end{cases}$$

$$\text{und } l.\sin.\frac{z}{2} - l.S.T. = l.\frac{CD}{2} - \begin{cases} l.\ CA \\ l.\ DA \end{cases}$$

$$3)\ \sin.\frac{z}{2} : \sin.\begin{Bmatrix} r \\ x \end{Bmatrix} = \frac{CD}{2} : BA$$

$$\text{und } l.\sin.\frac{z}{2} - l.\sin.\begin{Bmatrix} r \\ x \end{Bmatrix} = l.\frac{CD}{2} - l.\ BA.$$

Beyspiel.

Es sey (Fig. 83.)

gegeben	zu finden
$CD = 10{,}5^{\circ}$	$r = 65^{\circ}.2'$
$x = 65^{\circ}.2'$	$CA = DA = 12{,}43807^{\circ}$
$z = 49^{\circ}.56'$	$BA = 11{,}27578^{\circ}$

1) $179^{\circ}.60' - 114^{\circ}.58' = 65^{\circ}.2' = r.$

2) $l.\sin.24^{\circ}.58' - l.\sin.90^{\circ} = l.5{,}25 - \begin{cases} l.\ CA \\ l.\ DA \end{cases}$

$$l.\ 5{,}25 = 0{,}7201593$$
$$l.\sin.\ 90^{\circ} = 10{,}0000000$$

$$l.\ 5{,}25 + l.\sin.90^{\circ} = 10{,}7201593$$
$$l.\sin.24^{\circ}.58' = 9{,}6254060$$

$$(l.5{,}25 + l.\sin.90^{\circ}) - l.\sin.24^{\circ}.58' = 1{,}0947533 = \begin{cases} l.\ CA \\ l.\ DA \end{cases}$$

Dazu gehörige Zahl $= 12,43807^{\circ} = \begin{cases} CA \\ DA \end{cases}$

3) $l.\sin. 24^{\circ}.58' - l.\sin. 65^{\circ}.2' = l. 5,25 - l. BA$

$$l. 5,25 = 0,7201593$$
$$l\ \sin. 65^{\circ}.2' = 9,9573934$$

$$l. 5,25 + l.\sin. 65^{\circ}.2' = 10,6775527$$
$$l.\sin. 24^{\circ}.58' = 9,6254060$$

$(l. 5,25 + l.\sin. 65^{\circ}.2' - l.\sin. 24^{\circ}.58' = 1,0521467 = l. BA$

Dazu gehörige Zahl $= 11,27578^{\circ} =$ BA.

b) wenn die 2 gleichen Winkel beyde an einer der unbekannten Seiten anliegen.

Es sey (Fig. 84.)

gegeben	zu finden
1) CD	1) der dritte Winkel.
2) zwey Winkel	2) CA
	3) DA
	4) BA;

so ist

1) der dritte Winkel $= 180^{\circ}$ — der Summe der zwey gegebenen.

2) sin. z : sin. r = CD : CA

und l. sin. z — l. sin. r = l. CD — l. CA

3) CD = DA

4) S. T. : sin. r = CD : BA

und l. S. T. — l. sin. r = l. CD — l. BA.

Beyspiel.

Es sey (Fig. 84.)

gegeben	zu finden
CD = 15,9°	z = 70°.4′
x = 70°.4′	CA = 10,84146°
r = 39°.52′	DA = CD = 15,9°
	AB = 10,19195°

1) 179°.60′ — 109°.56′ = 70°. 4′ = Z.

2) l. sin. 70°.4′ — l. sin. 39°.52′ = l. 15,9 — l. CA

l. 15,9 = 1,2013971
l. sin. 39°.52′ = 9,8068602

l. 15,9 + l. sin. 39°.52′ = 11,0082573
l. sin. 70°.4′ = 9,9731694

(l. 15,9 + l. sin. 39°. 52′) — l. sin 70°.4′ = 1,0350879 = l. CA.

Dazu gehörige Zahl = 10,84146° = CA.

3) DA = CD = 15,9°.

4) l. sin. 90° — l. sin. 39°.52′ = l. 15,9 — l. BA.

$$
\begin{aligned}
\text{l. } 15{,}9 &= 1{,}2013971 \\
\text{l. sin. } 39^\circ.52' &= 9{,}8068602 \\
\hline
\text{l. } 15{,}9 + \text{l. sin. } 39^\circ.52' &= 11{,}0082573 \\
\text{l. sin. } 90^\circ &= 10{,}000\,0000 \\
\hline
(\text{l. } 15{,}9 + \text{l. sin. } 39^\circ.52') - \text{l. sin. } 90^\circ &= 1{,}0082573 = \text{l. BA}
\end{aligned}
$$

Dazu gehörige Zahl = 10,19195° = BA.

C.) Wenn das Dreyeck gleichseitig ist.

Es sey (Fig. 85.)

gegeben	zu finden
1) CD	1) der dritte Winkel
2) zwey Winkel, jeder = 60°	2) CA = DA
	3) BA;

so ist

1) der dritte Winkel = 180° — 2 × 60° = 60°

2) $\left.\begin{matrix} \text{CA} \\ \text{DA} \end{matrix}\right\} = \text{CD}.$

3) $\overline{BA}^2 = \overline{CA}^2 - \overline{CB}^2$

$$\overline{BA}^2 = \overline{CD}^2 - \frac{\overline{CD}^2}{4}$$

$$\overline{BA}^2 = \frac{4\overline{CD}^2}{4} - \frac{\overline{CD}^2}{4}$$

$$\overline{BA}^2 = \frac{3\overline{CD}^2}{4}$$

$$BA = \sqrt{3} \times \frac{CD}{2} \quad (\sqrt{\ }$$

und weil, nach Z. L. §. 274. Nro. 4, der Logar. von $\sqrt{3} = \frac{l.\ 3}{2}$

$$l.\ BA = \frac{l.\ 3}{2} + l. \frac{CD}{2}$$

Beyspiel.

Es sey (Fig. 85.)

gegeben	zu finden
CD = 10°	r = 60°
x } = 60°	CA = DA = CD = 10°
z }	BA = 8,660254°

1) 180° — 120° = 60° = r.

2) $\left.\begin{matrix}CA\\DA\end{matrix}\right\} = CD = 10^\circ.$

3) $BA = \sqrt{3} \times 5 = 1{,}7320508 \times 5 = 8{,}6602540^\circ$

oder logarithmisch:

$$l.\ BA = \frac{l.\ 3}{2} + l.\ 5$$

$$l.\ 3 = 0{,}4771213$$

$$\frac{l.\ 3}{2} = 0{,}2385606$$

$$l.\ 5 = 0{,}6989700$$

$$\frac{l.\ 3}{2} + l.\ 5 = 0{,}9375306 = l.\ BA.$$

Dazu gehörige Zahl = 8,660254 = BA.

D) Wenn das Dreyeck rechtwinklicht ist, und der rechte Winkel an der gegebenen Seite anliegt.

Es sey (Fig. 86.)

gegeben	zu finden
1) CD	1) der dritte Winkel
2) zwey Winkel	2) CA
	3) DA;

so ist

1) der dritte Winkel $= 180° -$ der Summe der zwey gegebenen, oder auch, wenn sich unter den zwey gegebenen der rechte Winkel befindet, $= 90° -$ dem gegebenen spitzigen.

2) a) $\sin. z : \sin. r = CD : CA$

$$\frac{\| \qquad\qquad}{\cos. r : \sin. r = CD : CA}$$

und $l. \cos. r - l. \sin. r = l. CD - l. CA$

(auch $\sin. z : \cos. z = CD : CA$)

b) wenn DC als Radius angenommen, und damit aus D der Bogen CF gezogen wird,

$$S. T. : \text{tang } r = CD : CA$$

und $l. S.T. - l \text{ tang}. r = l. CD - l. CA$

(auch $S.T. : \cot. z = CD : CA$)

3) $\sin. z : S.T. = CD : DA$

$$\frac{\| \qquad\qquad}{\cos. r : S.T. = CD : DA}$$

und $l. \cos. r - l. S. T. = l. CD - l. DA$

Beyspiel.

Es sey (Fig. 86.)

gegeben	zu finden
$CD = 18,2°$	$Z = 69°.46'$
$x = 90°$	$CA = 6,70832°$
$r = 20°.14'$	$DA = 19,39694°$

1) $89°.60' - 20°.14' = 69°.46' = z.$

2) a) $l. \cos. 20°.14' - l. \sin. 20°.14' = l. 18,2 - l. CA.$

$$l. 18,2 = 1,2600714$$
$$l. \sin. 20°.14' = 9,5388804$$

$$l. 18,2 + l. \sin. 20°.14' = 10,7989518$$
$$l. \cos. 20°.14' = 9,9723380$$
$$(l. 18,2 + l. \sin. 20°.14') - l. \cos. 20°.14' = 0,8266138 = l. CA.$$

Dazu gehörige Zahl $= 6,70832° = CA.$

b) $l. \sin. 90° - l. \tang. 20°.14' = l. 18,2 - l. CA$

$$l. 18,2 = 1,2600714$$
$$l. \tang. 20°.14' = 9,5665424$$

$$l. 18,2 + l. \tang. 20°.14' = 10,8266138$$
$$l. \sin. 90° = 10,0000000$$

$$(l. 18,2 + l. \tang. 20°.14') - l. \sin. 90° = 0,8266138 = l. CA$$

Die dazu gehörige Zahl $= 6,70832° = CA$

3) $l. \cos. 20°.14' - l. \sin. 90° = l. 18,2 - l. DA$

$$\text{l. } 18{,}2 = 1{,}2600714$$
$$\text{l. sin. } 90^\circ = 10{,}0000000$$

$$\text{l. } 18{,}2 + \text{l. sin. } 90^\circ = 11{,}2600714$$
$$\text{l cos. } 20^\circ.14' = 9{,}9723380$$

$$(\text{l. } 18{,}2 + \text{l. sin. } 90^\circ) - \text{l. cos. } 20^\circ.14' = 1{,}2877334 = \text{l. DA}$$

Dazu gehörige Zahl $= 19{,}39694^\circ =$ DA.

§. 116.

Aus zwey gegebenen Seiten und Einem gegebenen Winkel, der einer jener bekannten Seiten gegenüberliegt, nebst der Art des der andern gegebenen Seite gegenüberliegenden Winkels, die dritte Seite, die zwey übrigen Winkel und die zu einer der gegebenen Seiten als Grundlinie gehörige Höhe eines Dreyecks zu finden.

Aus §. 49 und 62, Nro. 3, 4 und 5 wird es jedem noch erinnerlich seyn, daß zwey Seiten und ein Winkel, welcher einer von jenen beyden Seiten gegenüberliegt, nur dann ein Dreyeck bestimmen, wenn auch die Art des der andern Seite gegenüberliegenden Winkels bekannt ist. Dieß ist aber der Fall 1) wenn der gegebene Winkel ein rechter oder stumpf ist (§. 49 und 62, Nro. 3 und 4), denn dann sind die 2 übrigen gewiß spitzig, oder 2) wenn die dem gegebenen spitzigen Winkel gegenüberstehende be-

kannte Seite nicht kleiner ist, als die andere gegebene Seite, an welcher der gegebene Winkel anliegt, dann ist auch derjenige Winkel, welcher dieser Seite gegenüber liegt, nicht größer als der gegebene, folglich ebenfalls spitzig (§. 49 und 62. Nro. 5.) Fände aber weder das Eine noch das Andere in der Aufgabe Statt, so gehörte sie zu den unbestimmten Aufgaben, die durch Trigonometrie eben so wenig als durch die gewöhnliche geometrische Bildung aufgelöst werden kann, indem man, wenn der Sinus jenes Winkels berechnet ist, nicht weiß, ob der zu diesem Sinus gehörige spitzige oder stumpfe Winkel genommen werden soll, es wäre dann, daß die Art desselben unmittelbar gegeben wäre, oder aus andern Umständen mit Zuverläßsigkeit geschlossen werden könnte.

A) Ueberhaupt, wenn der gegebene Winkel schief, und die zwey gegebenen Seiten ungleich sind.

Es sey (Fig. 87.) in den beyden Dreyecken CAD

gegeben	zu finden
1) CD, an welcher x anliegt,	1) Der Winkel z
2) DA, welche dem Winkel x gegenüberliegt, und größer als CD ist,	2) Der Winkel r
	3) Die Seite CA
3) x	4) Die Höhe DA;

so ist

1) DA : CD = sin. x : sin. z.

und l. DA — l. CD = l. sin. x — l. sin. z.

2) $r = 180° - (x + z)$

3) $\frac{\sin. x : \sin. r = DA : CA}{}$

und $l. \sin. x - l. \sin. r = l. DA - l. CA$

4) im rechtwinklichten Dreyeck ABD

$\frac{S.T. : \sin. r = DA : BA}{}$

und $l. S.T. - l. \sin r = l. DA - l. BA.$

Beyspiel.

Es sey im ersten Dreyeck der 87ten Figur

gegeben	zu finden
$CD = 23,2°$	$z = 54°.56'.13''$
$DA = 28°$	$r = 43°.59'.47''$
$x = 81°.4'$	$CA = 19,68798°$
	$BA = 19,44916°$

1) $l. 28 - l. 23,2 = l. \sin. 81°.4' - l. \sin. z$

$$l. \sin. 81°.4' = 9,9946997$$
$$l. 23,2 = 1,3654880$$
$$11,3601877$$
$$l. 28 = 1,4471580$$
$$9,9130297 = l.\sin. z$$

Dazu gehöriger Winkel $= 54°.56'.13'' = z.$

2) $179°.59'.60'' - 136°.0'.13'' = 43°.59'.47'' = r.$

3) $l. \sin. 81°.4' - l. \sin. 43°.59'.47'' = l. 28 - l. CA$

$$
\begin{array}{rl}
l.\ 28 = & 1,4471580 \\
l.\ \sin.\ 43°.59'.47'' = & 9,8417429 \\
\hline
& 11,2889009 \\
l.\ \sin.\ 81°.4' = & 9,9946997 \\
\hline
& 1,2942012 = l.\ CA
\end{array}
$$

Dazu gehörige Zahl = 19,68798° = CA

4) $l. \sin. 90° - l. \sin. 43°.59'.47'' = l. 28 - l. BA$

$$
\begin{array}{rl}
l.\ 28 = & 1,4471580 \\
l.\ \sin.\ 43°.59'.47'' = & 9,8417429 \\
\hline
& 11,2889009 \\
l.\ \sin.\ 90° = & 10,0000000 \\
\hline
& 1,2889009 = l.\ BA
\end{array}
$$

Dazu gehörige Zahl = 19,44916° = BA.

B) Wenn der gegebene Winkel abermals schief ist, die zwey gegebenen Seiten aber gleich sind.

Es sey (Fig. 81.)

gegeben	zu finden
1) CD = DA	1) z
2) x	2) r
	3) CA
	4) BA;

so ist

1) z = x
2) r = 180° — 2 x, und
3) CA, deßgleichen
4) BA werden gefunden, wie im §. 115, lit. B.b.

C) Wenn der gegebene Winkel ein rechter ist.

Es sey (Fig. 88.)

gegeben	zu finden
1) CD	1) z
2) DA	2) r
3) x = 90°	3) CA;

so ist

1) DA : CD = S. T. : sin. z

und l. DA — l. CD = l. S. T. — l. sin. z

2) 90° — z = r.

3) Ist nun r gefunden, so könnte zwar

a) CA wie im §. 115, lit. C, es kann aber auch

b) unmittelbar aus den 2 gegebenen Seiten vermittelst des Pythagoräischen Lehrsatzes gefunden werden, indem

$$\overline{CA}^2 = \overline{DA}^2 - \overline{CD}^2$$

und $CA = \sqrt{\overline{DA}^2 - \overline{CD}^2}$.

Dieser Ausdruck ist aber zur logarithmischen Berechnung sehr unbequem. Wollte man nemlich, da 2 l. CD = l. $\overline{CD}^2$ und 2 l. DA = l. $\overline{DA}^2$, diesen doppelten Logarithmen von jenem abziehen, so würde die Differenz nicht der Logarithme des Unterschieds zwischen $\overline{DA}^2$ und $\overline{CD}^2$, sondern der Logarithme des Quotienten $\frac{\overline{DA}^2}{\overline{CD}^2}$ seyn (Z. L. §. 274. Nro. 2 und 3).

Dieser Schwierigkeit wird aber auf folgende Art ausgewichen:

Es ist (Fig. 89.)

$$\overline{DA}^2 - \overline{CD}^2 = (I + II + III) - I = II + III$$

II aber $= (DA - CD)\ DA$
und III $= (DA - CD)\ CD$

folglich $\overline{DA}^2 - \overline{CD}^2 = (DA - CD)\ DA + (DA - CD)\ CD$

oder $\overline{DA}^2 - \overline{CD}^2 = (DA - CD) \times (DA + CD)$

Daher $CA = \sqrt{(DA - CD) \times (DA + CD)}$

und $l.\ CA = \frac{l.\ (DA - CD) + l.\ (DA + CD)}{2}$

Beyspiel.

Es sey (Fig. 88.)

gegeben	zu finden
CD = 59°	z = 66°.59'.24"
DA = 64,1°	r = 23°.0'.36"
x = 90°	CA = 25,05614°

1) l. 64,1 — l. 59 = l. sin. 90° — l. sin. z

l. sin. 90° = 10,0000000
l. 59 = 1,7708520

11,7708520
l. 64,1 = 1,8068580

9,9639940 = l. sin. z.

Dazu gehöriger Winkel = 66°.59'.24" = z

2) $89^\circ.59'.60'' - 66^\circ.59'.24'' = 23^\circ.0'.36'' = r.$

3) a) $l.\ sin.\ 66^\circ.59'.24'' - l.\ cos.\ 66^\circ.59'.24'' = l.\ 59 - l.\ CA.$

l. 59 =	1,7708520
l. cos. 66°.59'.24" =	9,5920565
	11,3629085
l. sin. 66°.59'.24" =	9,9639940
	1,3989145 = l. CA.

Dazu gehörige Zahl = 25,05616° = CA.

b) $DA - CD = 64{,}1^\circ - 59^\circ = 5{,}1^\circ$
$DA + CD = 64{,}1^\circ + 59^\circ = 123{,}1^\circ$

l. 5,1 =	0,7075702
l. 123,1 =	2,0902581
:2)	2,7978283
	1,3989141 = l. CA

Dazu gehörige Zahl = 25,05614 = CA.

§. 117.

Aus den 3 gegebenen Seiten die zu einer derselben als Grundlinie gehörige Höhe und die 3 Winkel eines Dreyecks zu finden.

A) Ueberhaupt, wenn die gegebenen Seiten ungleich sind.

Es sey (Fig. 91)

gegeben	zu finden
1) CA	1) Die Höhe BA
2) DA	2) r
3) CD	3) z
	4) x.

1) a) Man denke sich aus A mit der kürzesten Seite DA einen Cirkel gezogen, und fälle in Gedanken auf die längste Seite CD das Höhenperpendikel BA; so ist

CD die Basis des Dreyecks,
CH die Summe der 2 übrigen Seiten
(weil DA = AH)
CF die Differenz der 2 übrigen Seiten
(weil DA = AF)

BG = BD (§. 93. Nro. 4.)
und
CG : CH = EF : CD (§. 93. Nro. 14)

oder CD : CF = CH : CG (Z.L.§.240. Nro.2)

d. i. Basis : {Differenz der 2 übrigen Seiten} = {Summe der 2 übrigen Seiten} : CG

b) Hiernach wäre CG zu finden, und da CD — CG = GD, und $\frac{GD}{2}$ = BD, so kann auch

in dem rechtwinklichten Dreyeck BDA der Cathetus BD gefunden werden.

c) Nun ist aber, nach §. 116,

$$l.\ BA = \frac{l.\ (DA - BD) + l.\ (DA + BD)}{2}$$

2) $DA : BA = S.T. : \sin. r$

und $l.\ DA - l.\ BA = l.\ S.T. - l.\ \sin. r$

3) $CA : CD = \sin. r : \sin. z$

und $l.\ CA - l.\ CD = l. \sin. r - l. \sin. z$

4) $180^\circ - (r + z) = x.$

Beyspiel.

Es sey (Fig. 91.)

gegeben	zu finden
$CA = 14^\circ$	$CG = 2{,}883139^\circ$
$DA = 12{,}1^\circ$	$BD = 7{,}158430^\circ$
$CD = 17{,}2^\circ$	$BA = 9{,}75535^\circ$
	$r = 53^\circ.43'.44{,}2''$
	$z = 82^\circ.5'.57{,}3''$
	$x = 44^\circ.10'.18{,}5''$

1) a) Differenz der 2 übrigen Seiten = 1,9°
Summe der 2 übrigen Seiten = 26,1°;
daher

17,2 : 1,9 = 26,1 : CG
1,9
―――――
2349
261
―――――
49,59 | 17,20
3440 | 2,883139° = CG
―――――
15190
13760
―――――
14300
13760
―――――
5400
5160
―――――
2400
1720
―――――
6800
5160
―――――
16400
15480
―――――
920

b) $CD = 17,2^\circ$

$CG = 2,883139^\circ$

$GD = 14,316861^\circ$

$\frac{GD}{2} = 7,158430^\circ = BD$

c) $DA - BD = 12,1^\circ - 7,158430^\circ = 4,941570^\circ$

$DA + BD = 12,1^\circ + 7,158430^\circ = 19,258430^\circ$

$l.\ 4,94157 = 0,6938650$

$l.\ 19,25843 = 1,2846209$

$: 2)\ \frac{1,9784859}{0,9892429} = l.\ BA$

Dazu gehörige Zahl $= 9,75535 = BA$

2) $l.\ 12,1 - l.\ 9,75535 = l.\ sin.\ 90^\circ - l.\ sin.\ r.$

$l.\ sin.\ 90^\circ = 10,0000000$

$l.\ 9,75535 = 0,9892429$

$10,9892429$

$l.\ 12,1 = 1,0827854$

$9,9064575 = l.\ sin.\ r.$

Dazu gehöriger Winkel $= 53^\circ.43'.44,2'' = r.$

3) $l.\,14 - l.\,17{,}2 = l.\,\sin.\,53^\circ.\,43'.44{,}2'' - l.\,\sin.\,z$

$$\begin{array}{rl} l.\,\sin.\,53^\circ.43'.44{,}2'' = & 9{,}9064575 \\ l.\,17{,}2 = & 1{,}2355284 \\ \hline & 11{,}1419859 \\ l.\,14 = & 1{,}1461280 \\ \hline & 9{,}9958579 = l.\,\sin.\,z \end{array}$$

Dazu gehöriger Winkel $= 82^\circ.5'.57{,}3'' = z$.

4) $180^\circ - (53^\circ.43'.44{,}2'' + 82^\circ.5'.57{,}3'') = 179^\circ.59'.60'' - 135^\circ.49'.41{,}5'' = 44^\circ.\,10'.18{,}5'' = x$.

Wäre aber auf diese Art der Winkel z kleiner als einer der beyden übrigen gefunden worden, da er doch, weil er der größten Seite gegenübersteht, größer seyn muß, so wär der Ergänzungswinkel zu 180° der wahre, in diesem Fall stumpfe Winkel z gewesen.

Prüfung der Winkel durch Berechnung des Winkels x im rechtwinklichten △ CBA.

Es ist

CB = CG + BG (und BG = BD) also

$CB = 2{,}883139^\circ + 7{,}158430^\circ = 10{,}041569^\circ$.

Daher, da

$$CA : CB = S.T. : \cos. x$$

und $l. CA - l. CB = l. S. T. - l. \cos. x$;

$l. 14 - l. 10{,}041569 = l. \sin\ 0° - l. \cos. x$

$$l. \sin. 90° = 10{,}0000000$$

$$l. 10{,}041569 = 1{,}0018016$$

$$11{,}0018016$$

$$l. 14 = 1{,}1461280$$

$$9{,}8556736 = l. \cos. x$$

Dazu gehöriger Winkel $= 44°.10'.18{,}1'' = x$.

B) Wenn zwey der gegebenen Seiten gleich sind.

Es sey (Fig. 83. a.)

gegeben	zu finden
1) CA = DA	1) BA
2) CD	2) z
	3) x = r;

so ist

$$1)\ \overline{BA}^2 = \overline{CA}^2 - \overline{CB}^2$$

$$\overline{BA}^2 = \overline{CA}^2 - \frac{\overline{CD}^2}{4}$$

$$\overline{BA}^2 = \left(CA - \frac{CD}{2}\right) \times \left(CA + \frac{CD}{2}\right)$$

$$BA = \sqrt{\left(CA - \frac{CD}{2}\right) \times \left(CA + \frac{CD}{2}\right)}$$

und $l.\ BA = \frac{l.\left(CA - \frac{CD}{2}\right) + l.\left(CA + \frac{CD}{2}\right)}{2}$

$$2)\ CA : \frac{CD}{2} = S.\ T. : \sin.\ \frac{z}{2}$$

und $l.\ CA - l.\ \frac{CD}{2} = l.\ S.\ T. - l.\ \sin.\ \frac{z}{2}$

wo der Winkel $\frac{z}{2}$ gewiß spitzig ist.

$$3)\ 90^\circ - z = \begin{cases} x \\ r \end{cases}$$

Bey

Beyspiel.

Es sey (Fig. 83. a.)

gegeben	zu finden
CA = DA = 12,44°	1) BA = 11,2779°
CD = 10,5°	2) z = 49°. 55'.30,2"
	3) x = r = 65°.2'.14,9"

$$1)\quad CA - \frac{CD}{2} = 12{,}44 - 5{,}25 = 7{,}19$$

$$CA + \frac{CD}{2} = 12{,}44 + 5{,}25 = 17{,}69$$

l. 7,19 = 0,8567289
l. 17,69 = 1,2477278

$$:2) \quad \frac{2{,}1044567}{1{,}0522283} = \text{l. BA.}$$

Dazu gehörige Zahl = 11,2779° = BA

$$2)\ \text{l. } 12{,}44 - \text{l. } 5{,}25 = \text{l. S. T.} - \text{l. sin. } \frac{z}{2}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{l. sin. } 90^{\circ} & = & 10{,}0000000 \\ \text{l. } 5{,}25 & = & 0{,}7201593 \\ \hline & & 10{,}7201593 \\ \text{l. } 12{,}44 & = & 1{,}0948204 \\ \hline \end{array}$$

$$9{,}6253389 = \text{l. sin. } \frac{z}{2}$$

Dazu gehöriger Winkel $= 24^{\circ}.57'.45{,}1'' = \frac{z}{2}$,

folglich $z = 49^{\circ}.55'.30{,}2''$.

3) $89^{\circ}.59'.60'' - 24^{\circ}.57'.45{,}1'' = 65^{\circ}.2'.14{,}9'' =$

$$= \begin{cases} x \\ r \end{cases}$$

G.) Wenn alle 3 Seiten gleich sind.

Es sey (Fig. 85.)

gegeben	zu finden
CA = DA = CD	1) BA 2) die 3 Winkel;

so wird

1) BA gefunden, wie im §. 115, lit. C.

2) $z = x = r = 60^{\circ}$.

§. 118.

Aus zwey gegebenen Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel die zwey übrigen Winkel, die dritte Seite und die zu einer der gegebenen Seiten als Grundline gehörige Höhe eines Dreyecks zu finden.

A.) Ueberhaupt, wenn die 2 gegebenen Seiten ungleich sind, und der von ihnen eingeschlossene Winkel schief ist.

Es sey (Fig. 92.)

gegeben	zu finden
1) CA	1) z
2) CD	2) r
3) x	3) DA
	4) BA.

1 und 2) a.) Da x bekannt und 180° — x = z + r ist, so kann die Summe der beyden unbekannten Winkel leicht gefunden werden. Wüßte man nun auch die Differenz derselben, so ließen sich diese Winkel selbst vermittelst folgenden Satzes berechnen: **Die halbe Summe zweyer Größen + der halben Differenz derselben ist = der größern, und die halbe Summe — der halben Differenz = der**

kleinern der beyden Größen. *) Es ist z. B. bey den 2 Größen 6 und 8 die Summe 14, die halbe Summe 7, die Differenz 2, die halbe Differenz 1; aber auch 7 + 1 = 8, und 7 − 1 = 6.

b) Man sucht daher die Tangente der halben Differenz der beyden unbekannten Winkel, und addirt oder subtrahirt den zu dieser Tangente gehörigen Winkel zu oder von der halben Summe der beyden unbekannten. Im ersten Fall wird hierdurch der größere Winkel z, welcher der größern Seite CD, im zweyten Fall der kleinere Winkel r, welcher der kleineren Seite CA gegenüberliegt, erhalten. Es ist nemlich

$$\frac{z + r}{2} + \frac{z - r}{2} = z$$

und $$\frac{z + r}{2} - \frac{z - r}{2} = r.$$

c.) Es wird aber die Tangente der halben Differenz der zwey unbekannten Winkel durch folgende Proportion gefunden:

Summe der 2 gegebenen Seiten: Differenz derselben = Tangente der halben Summe der unbekannten Winkel:

---

*) Siehe die Anmerk. zu §. 82.

Tangente der halben Differenz derselben.

Die Richtigkeit dieser Proportion läßt sich folgendermaaßen erweisen:

Man verlängere CD unbestimmt nach I, beschreibe aus C mit CA (mit der kleinern der beyden gegebenen Seiten) den Halbkreis GAF; ziehe die Linie AG; ferner durch F und A die Linie FH von unbestimmter Länge, und durch D mit AG die Parallele ED. Nun ist (§. 61. Nro. 2)

FD : FE = GD : AE

oder FD : GD = FE : AE, d. i.

FD	:	GD	=	FE	:	AE
‖		‖		‖		‖
Summe der 2 gegebenen Seiten	:	Differenz der 2 gegebenen Seit.	=	FE	:	AE, und, wenn DE als Radius angenommen wird,
				‖		‖
			=	Tang. r + n	:	Tang. n

Es muß daher nun, um die obige Proportion zu beweisen, noch gezeigt werden, daß r + n = sey der halben Summe, und n = der halben Differenz der beyden unbekannten Winkel. Es ist aber

Summe dieser Winkel $= z + r$

$= \angle CAG + \angle GAD + r$

$= \angle CGA + \angle GAD + r$

$= \angle CGA + \angle CGA$ (§. 52. Nro. 2. lit. g.)

$= 2 \angle CGA$

od. halbe Summe der $\angle\angle = \angle CGA$

$= r + n$ (weil AG parallel mit ED)

ferner

Differenz der $\angle\angle = z - r$

$= \angle CAG + \angle GAD - r$

$= \angle CGA + n - r$

$= r + n + n - r$

$= 2n$

od. halbe Differenz d. $\angle\angle = n$

Daher $CD + CA : CD - CA = \text{tang.} \frac{z+r}{2} : \text{tang.} \frac{z-r}{2}$

und $l(CD + CA) - l(CD - CA = l.\text{tang.} \frac{z+r}{2} - l.\text{tang.} \frac{z-r}{2}$

3) $\sin. z : \sin. x = CD : DA$

und $l. \sin. z - l. \sin. x = l. CD - l. DA$

4) im rechtwinklichten $\triangle$ CAB

$S. T. : \sin. x = CA : BA$

und $l. S. T. - l. \sin. x = l. CA - l. BA$

Beyspiel.

Es sey (Fig. 92.)

gegeben	zu finden
$CA = 8{,}1°$	$z = 108°.40'.3{,}8''$
$CD = 17{,}3°$	$r = 26°.19'.56{,}2''$
$x = 45°$	$DA = 12{,}91225°$
	$BA = 5{,}727564°$

1 und 2) $CD + CA = 25{,}4°$

$CD - CA = 9{,}2°$

$\frac{z+r}{2} = \frac{180° - 45°}{2} = \frac{135°}{2} = 67°.30'.$

$$l.\,25{,}4 - l.\,9{,}2 = l.\,tang.\,67^\circ.30' - l.\,tang.\,\frac{z-r}{2}$$

$$\begin{array}{rcl} l.\,tang.\,67^\circ.30' & = & 10{,}3827757 \\ l.\ 9{,}2 & = & 0{,}9637878 \\ \hline & & 11{,}3465635 \\ l.\,25{,}4 & = & 1{,}4048337 \\ \hline \end{array}$$

$$9{,}9417298 = l.\,tang.\,\frac{z-r}{2}$$

Dazu gehöriger Winkel $= 41^\circ.10'.3{,}8'' = \frac{z-r}{2}$

Nun ist $67^\circ.30' + 41^\circ.10'.3{,}8'' = 108^\circ.40'.3{,}8'' = z$
und $67^\circ.29'.60'' - 41^\circ.10'.3{,}8'' = 26^\circ.19'.56{,}2'' = r$

3) $\sin.\,108^\circ.40'.3{,}8'' = \sin.\,(180^\circ - 108^\circ.40'.3{,}8'') = \sin.\ 71^\circ.19'.56{,}2''$.

$$l.\,\sin.\ 71^\circ.19'.56{,}2'' - l.\,\sin.\ 45^\circ = l.\ 17{,}3 - l.\,DA$$

$$\begin{array}{rcl} l.\ 17{,}3 & = & 1{,}2380461 \\ l.\,\sin.\ 45^\circ & = & 9{,}8494850 \\ \hline & & 11{,}0875311 \\ l.\,\sin.\ 71^\circ.19'.56{,}2'' & = & 9{,}9765291 \\ \hline \end{array}$$

$$1{,}1110020 = l\,DA$$

Dazu gehörige Zahl $= 12{,}91225^\circ = DA$:

4) $l. \sin. 90° - l. \sin. 45° = l. 8,1 - l. BA$

$$
\begin{array}{rl}
l. 8,1 = & 0,9084850 \\
l. \sin. 45° = & 9,8494850 \\
\hline
 & 10,7579700 \\
l. \sin. 90° = & 10,0000000 \\
\hline
 & 0,7579700 = l. BA
\end{array}
$$

Dazu gehörige Zahl $= 5,727564° = BA$

Prüfung der Winkel.

$$
\begin{array}{ll}
x = & 45° \\
z = & 108.40'.3,8'' \\
r = & 26.19.56,2 \\
\hline
 & 180°.0'.0''
\end{array}
$$

B.) Wenn die gegebenen Seiten abermals ungleich, der von ihnen eingeschlossene Winkel aber ein rechter ist.

Es sey (Fig. 93)

gegeben	zu finden
1) CA	1) r
2) CD	2) z
3) x. = 90°	3) DA;

so ist

1) CD : CA = S. T. : tang. r

und l. CD − l. CA = l. S. T. − l. tang. r

2) 90° − r = z

$$\overline{DA}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{CD}^2$$

$$DA = \sqrt{\overline{CA}^2 - \overline{CD}^2}$$

$$\text{und l. DA} = \frac{l(\overline{CA}^2 + \overline{CD}^2)}{2}$$

Beyspiel.

Es sey (Fig. 93.)

gegeben	zu finden
CA = 8,1	r = 25°.5′.21,7″
CD = 17,3	z = 64°.54′.38,3″
x = 90°	DA = 19,10235

= 1) l. 17,3 − l. 8,1 − l. sin. 90° − l. tang. r

l. sin. 90° = 10,0000000
l. 8,1 = 0,9084850

10,9084850
l. 17,3 = 1,2380461

9,6704389 = l.tang.r

Dazu gehöriger Winkel = 25°.5′.21,7″ = r

2) $89^\circ.59'.60'' = 25^\circ.5'.21,7'' = 64^\circ.54'.38,3'' = z.$

3) $CA = 8,1$

$\quad 8,1$

$\quad 81$

$\quad 648$

$65,61 = \overline{CA}^2$

$CD = 17,3$

$\quad 17,3$

$\quad 519$

$\quad 1211$

$\quad 173$

$299,29 = \overline{CD}^2$

$\overline{CA}^2 = 65,61$

$\overline{CD}^2 = 299,29$

$\overline{CA}^2 + \overline{CD}^2 = 3\,64,90 \mid 19,10$ 2c. $= DA$

1
2 | 64
29
2 | 61
3 | 90
3 | 81
9 | 00
38 | 20
9 | 00

2c.

oder

$$\frac{\text{l. } 364,9 = 2,5621739}{}$$

$$\frac{\text{l. } 364,9}{2} = 1,2810869 = \text{l. DA}$$

Dazu gehörige Zahl = $19,10235^{\circ}$ = DA.

C.) Wenn die 2 gegebenen Seiten gleich sind, und der eingeschlossene Winkel schief ist.

Es sey (Fig. 94.) in den beyden Dreyecken CAD.

gegeben	zu finden
1) CA = CD	1) z = r
2) x	2) DA
	3) BA

1) Wenn CA = CD, so ist $z = r = \frac{180^{\circ} - x}{2}$

und eine Perpendikulare CE, die man sich auf DA gefällt denkt, halbirt DA und den Winkel x. Daher ist

$$2)\ \text{S. T.} : \sin. \frac{x}{2} = \begin{Bmatrix}CA\\CD\end{Bmatrix} : \begin{Bmatrix}AE\\DE\end{Bmatrix}$$

$$= CD : \frac{DA}{2}$$

$$= 2\,CD : DA$$

und l. S. T. — l. sin. $\frac{x}{2}$ = l. 2 CD — l. DA

3) im rechtwinklichten Dreyeck BAC

$$\frac{S.T. : \sin. x = CA : BA}{\text{und } l. S.T. - l. \sin. x = l. CA - l. BA.}$$

Beyspiel.

Es sey (Fig. 94.) im zweyten Dreyeck

gegeben	zu finden
$CA = CD = 14^\circ$	$z = r = 16^\circ.59'$.
$x = 146^\circ 2'$	$DA = 26,7789^\circ$
	$BA = 7,821945^\circ$

1) $179^\circ.60' - 146^\circ.2' = \frac{33^\circ.58'}{2} = 16^\circ.59' = \begin{cases} z \\ r \end{cases}$

2) $l. \sin. 90^\circ - l. \sin. 73^\circ.1' = l. 28 - l. DA$

$$\begin{array}{r} l. 28 = 1,4471580 \\ l. \sin. 73^\circ.1' = 9,9806349 \\ \hline 11,4277929 \\ l. \sin. 90^\circ = 10,0000000 \\ \hline 1,4277929 = l. DA \end{array}$$

Dazu gehörige Zahl $= 26,7789^\circ = DA$

$$3)\ \text{l. sin. } 90^\circ - \text{l. sin.} \begin{Bmatrix} 146^\circ.2' \\ 33^\circ.58' \end{Bmatrix} = \text{l. } 14 - \text{l. BA}$$

$$\begin{array}{rl} \text{l. } 14 = & 1{,}1461280 \\ \text{l. sin. } 33^\circ.58' & 9{,}7471868 \\ \hline & 10{,}8933148 \\ \text{l. sin. } 90^\circ = & 10{,}0000000 \\ \hline & 0{,}8933148 = \text{l. BA} \end{array}$$

Dazu gehörige Zahl $= 7{,}821945' =$ BA

D.) Wenn die gegebenen 2 Seiten gleich sind, und der von ihnen eingeschlossene Winkel ein rechter ist.

Es sey (Fig. 95.)

gegeben	zu finden
1) CA = CD	1) z = r
2) x = 90°	2) DA;

so ist

$$1)\ z = r = \frac{90^\circ}{2}$$

$$2)\ \overline{DA}^2 = CA^2 + \overline{CD}^2$$

$$\overline{DA}^2 = 2\,\overline{CD}^2$$

$$DA = \sqrt{2\,\overline{CD}^2}$$

$$DA = CD\,\sqrt{2}$$

$$\text{und l. DA} = \text{l. CD} + \frac{\text{l. } 2}{2}$$

Beyspiel.

Es sey (Fig. 95.)

gegeben	zu finden
CA = CD = 10,2°	z = r = 45°
x = 90°	DA = 14,42498°

1) $\frac{90^\circ}{2} = 45^\circ = \begin{cases} z \\ r \end{cases}$

2) $\sqrt{2} = 1{,}4142136$
CD = 10,2

2828427 2
141421360

14,42497872° = DA

oder

l. 10,2 = 1,0086002
$\frac{\text{l. } 2}{2} = 0{,}1505150$

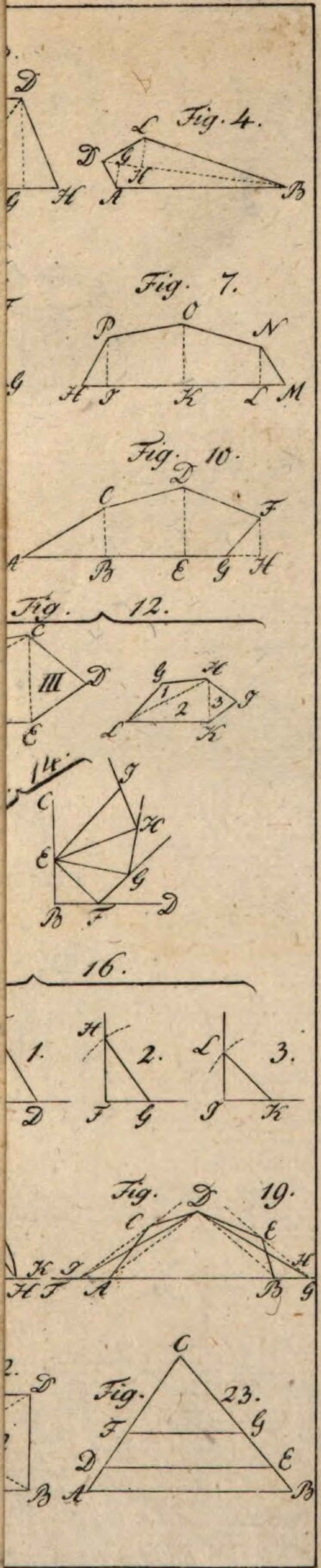
1,1591152 = l. DA

Dazu gehörige Zahl = 14,42498° = DA

Anwendung der bisherigen trigonometrischen Aufgaben auf die Aufgaben in den §§. 54 und 65, ferner in den §§. 66, 67 und 68 des ersten Curses.

Bayerische Staatsbibliothek München

Tab. I.



BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Wucherer, Gustav Friedrich,

Die Größenlehre, für Realschulen populär bearbeitet

Bd.: 2,2

Carlsruhe 1813

BHS II K 32-2,1/2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10708124-0